

«НАРОДНАЯ АСВЕТА»



ISBN 985-12-1559-7



Адукацыйны партал www.edu.by

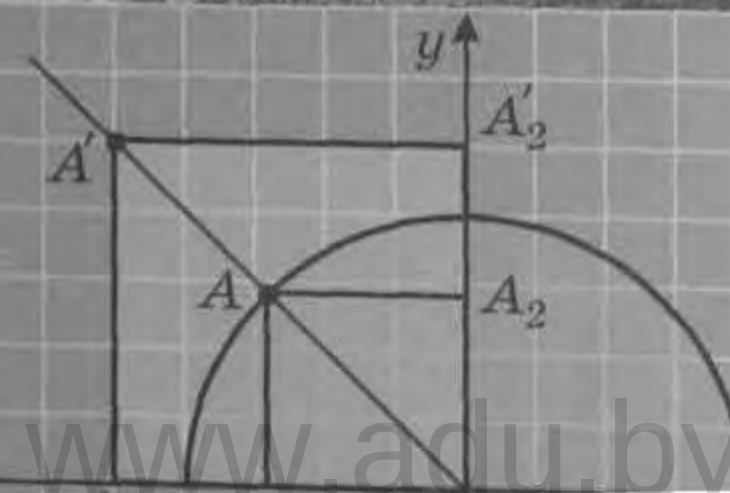
Н.В. ГВОЗДОВИЧ Т.П. КУБЕКО

ГЕОМЕТРИЯ

10

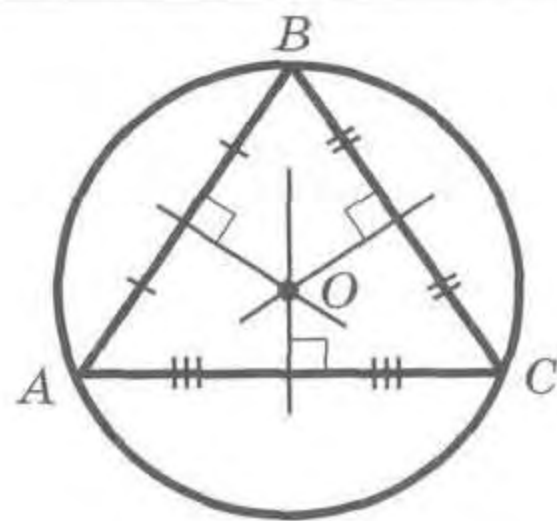
2006

Н. В. Гвоздович Т. П. Кубеко ГЕОМЕТРИЯ

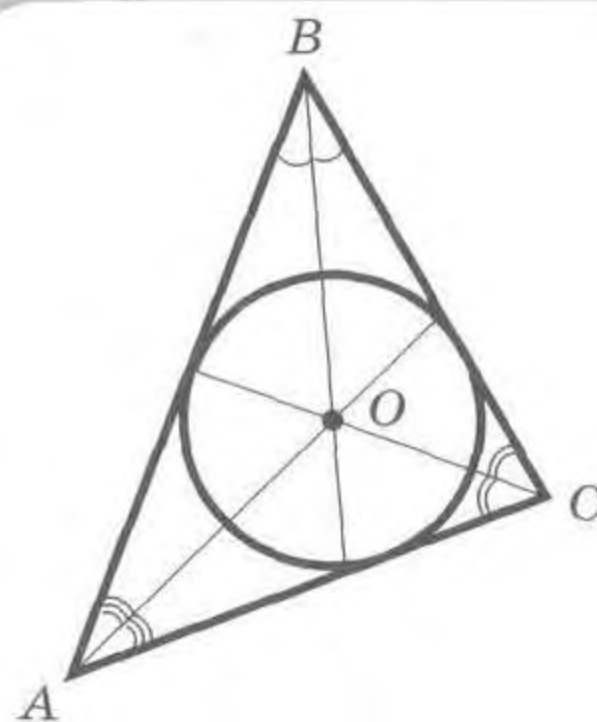


10

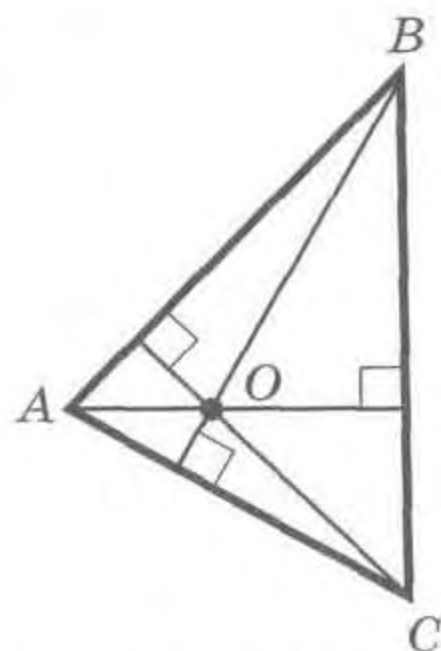
Замечательные точки треугольника



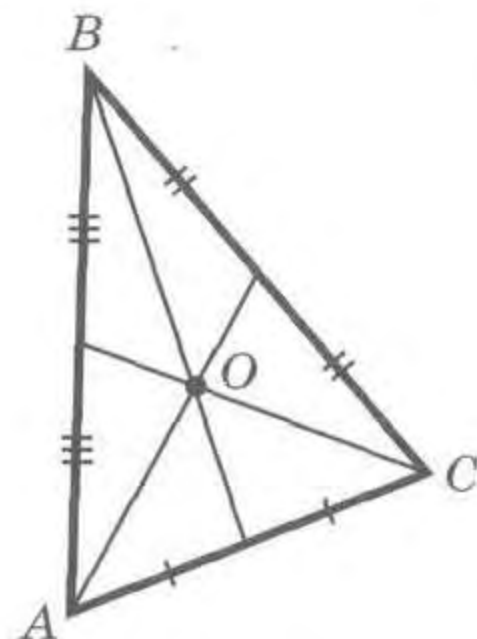
Прямые, на которых лежат серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, пересекаются в точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.



Биссектрисы треугольника пересекаются в точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

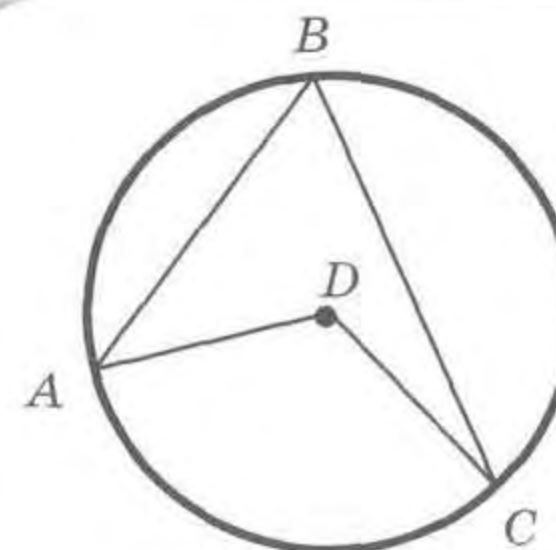


Прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в точке, которую называют ортоцентром треугольника.

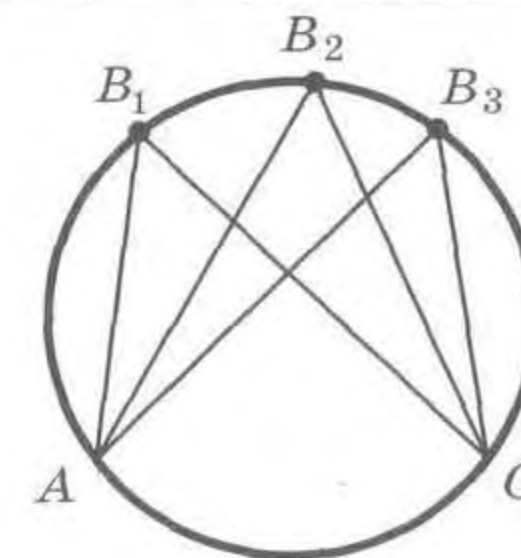


Медианы треугольника пересекаются в точке, которую называют центром тяжести треугольника.

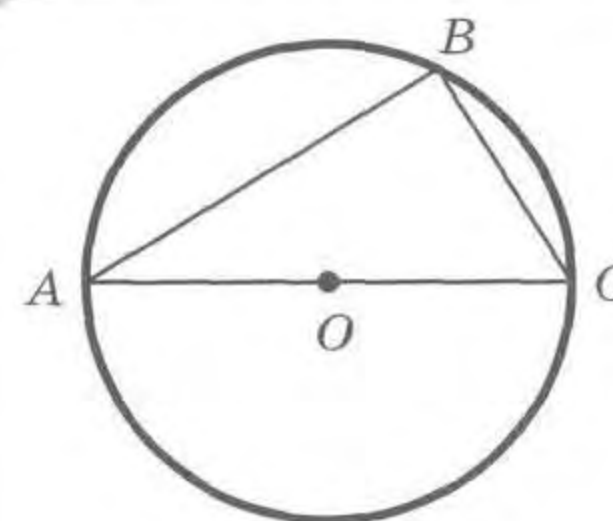
Свойства вписанных углов и следствия из них



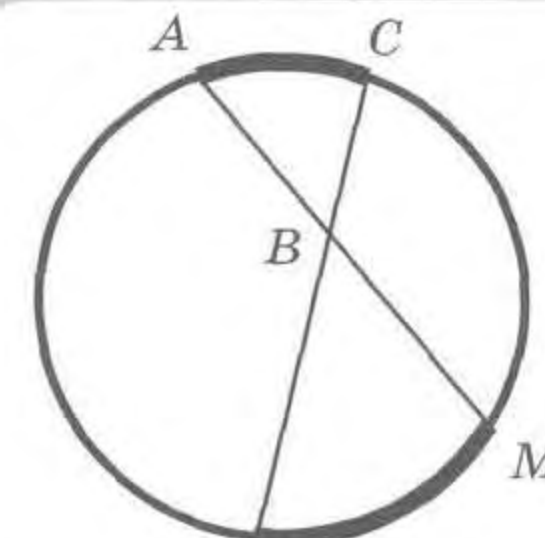
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle ADC$$



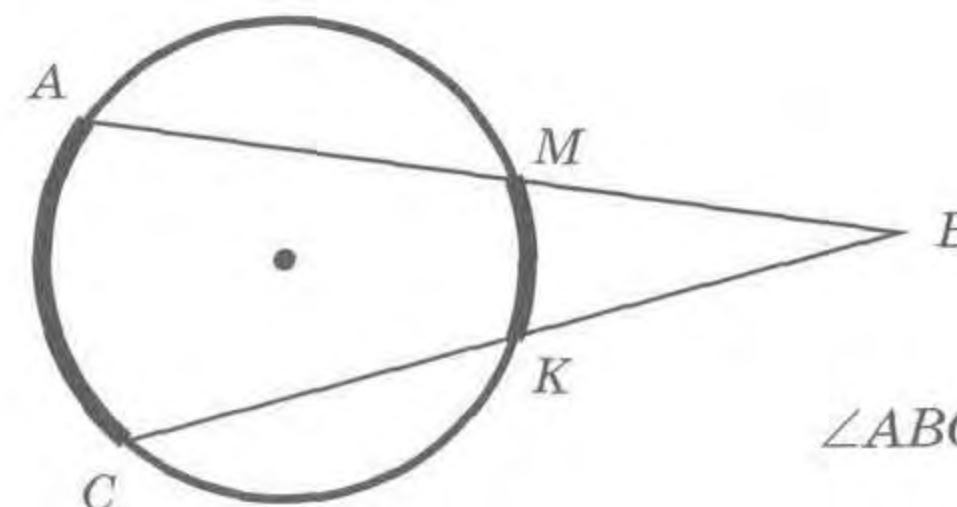
$$\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C$$



$$AC \text{ — диаметр} \\ \angle ABC = 90^\circ$$



$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{MP})$$



$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{MK})$$

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Г25

Рецензенты:

кафедра алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П. М. Машерова (канд. пед. наук, профессор *Е. Е. Семенов*); учитель математики высшей категории гимназии № 11 г. Минска *И. Г. Арефьева*

Условные обозначения:

- $\in$ — знак принадлежности;
- $\notin$ — знак не принадлежности;
- $\cap$ — знак пересечения;
- $\perp$ — знак перпендикулярности;
- $\rightarrow$ — знак, заменяющий слово «вытекает» и подобное ему;
- $\parallel$ — знак параллельности;
- $\sim$ — знак подобия;
- — конец доказательства;



— вопросы и задания;



— задачи базового уровня;



— задачи повышенного уровня.

603664/13173
Навукова-педагагічная бібліятэка
Навукова-метадычнай установы
«Нацыянальны інстытут адукацыі»

ISBN 985-12-1559-7

Навукова-педагагічная бібліятэка
Навукова-метадычнай установы
«Нацыянальны інстытут адукацыі»
© Гвоздович Н. В., Кубеко Т. П., 2006
© Формірае М. П. «Народная асвета», 2006



В десятом классе завершается изучение планиметрической части геометрии. Как и в учебном пособии для девятого класса, в этой книге весь материал разбит на главы, а каждая глава — на параграфы. Все теоремы имеют названия, которые можно использовать при ссылке на них в процессе доказательства других теорем или при решении задач.

После теоретической части каждого параграфа идут вопросы и задания для проверки усвоения полученных знаний. За ними — задачи базового уровня и задачи повышенного уровня. Кроме того, после каждой главы предлагаются задачи ко всей главе. Они также разбиты на задачи базового и повышенного уровней.

В приложениях даны таблицы тригонометрических функций, латинский алфавит и некоторые буквы греческого алфавита.

В конце пособия помещены ответы к задачам.

Часть материала изучается в классах, где математика преподается на повышенном уровне. Такой материал отмечен знаком (*) — звездочкой.

Авторский коллектив желает вам успехов в новом учебном году.

Замечательные точки треугольника



§ 1. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника

1.1. Ранее мы дали определения окружности и треугольника, рассмотрели некоторые их свойства. Сейчас изучим вопрос о возможных случаях их взаимного расположения. На окружности (рис. 1) отметим точки A, B, C и соединим их попарно. Образовавшийся треугольник ABC называют вписанным в окружность, а окружность — описанной около треугольника. Сформулируем определение. *Окружность, проходящую через все вершины треугольника, называют описанной около него, а треугольник — вписанным в окружность.*

Мы убедились, что в любую окружность можно вписать треугольник. А верно ли обратное утверждение, т. е. можно ли около любого треугольника описать окружность? Положительный

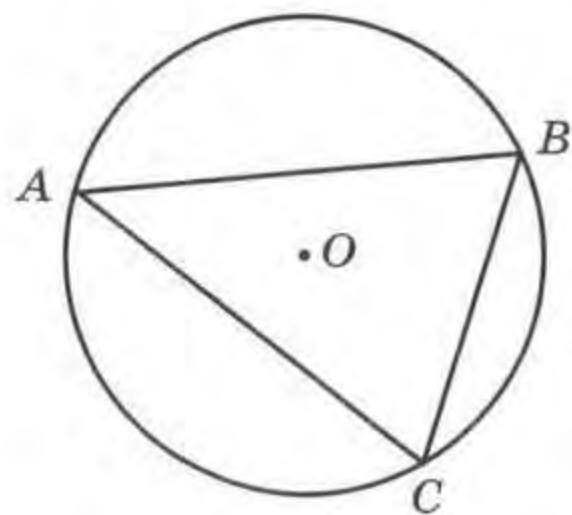


Рис. 1

ответ на поставленный вопрос дает приведенная ниже теорема. Для ее доказательства понадобится вспомогательное утверждение, называемое леммой.

Прямые на плоскости, перпендикулярные к пересекающимся прямым, пересекаются.

Дано: $AM \cap CK = B, a \perp AM, c \perp CK$ (рис. 2).

Доказать: a и c пересекаются.

Доказательство. 1) Пусть $a \parallel c$. Поскольку $BA \perp a$ и $c \parallel a$, то $BA \perp c$.

2) В силу того, что $BA \perp c$ и $BC \perp c$, следует, что BA и BC совпадают, а это противоречит условию теоремы: прямые BA и BC пересекаются.

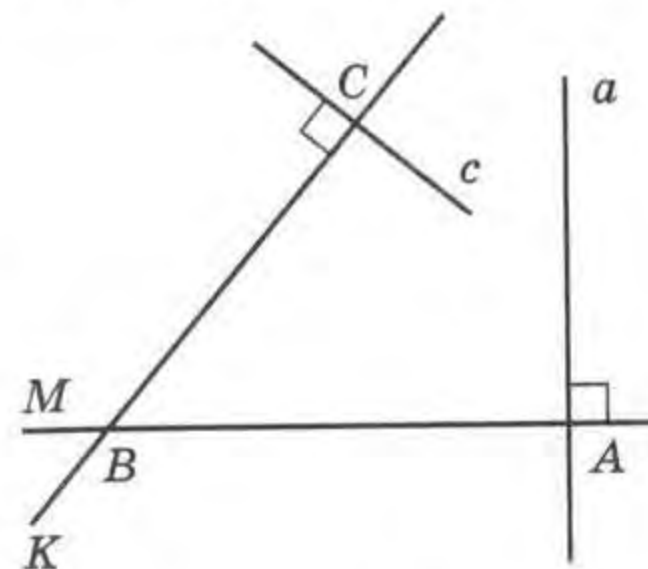


Рис. 2

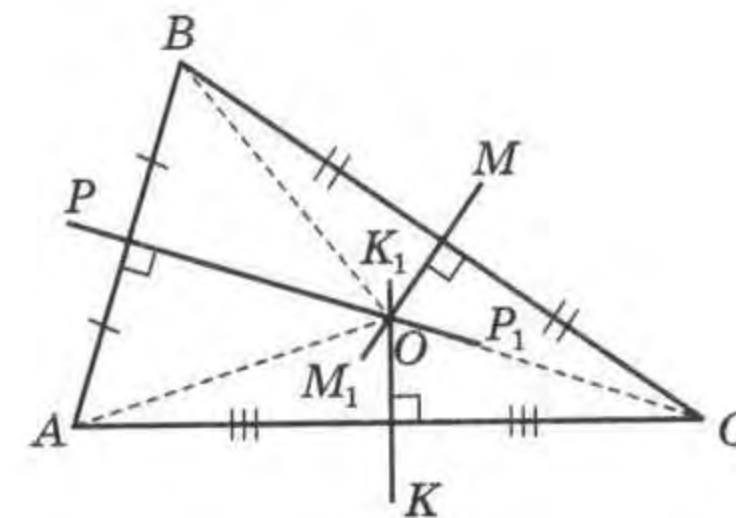


Рис. 3

1.2. Теорема (о центре описанной окружности). *Прямые, перпендикулярные сторонам треугольника и проходящие через их середины, пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.*

Дано: треугольник ABC , $BM = MC, AK = KC, AP = PB, MM_1 \perp BC, KK_1 \perp AC, PP_1 \perp AB$ (рис. 3).

Доказать: MM_1, KK_1 и PP_1 пересекутся в некоторой точке O , которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Доказательство. 1) MM_1 и KK_1 пересекаются по лемме. Точку пересечения обозначим через O .

2) KK_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AC , и O принадлежит отрезку KK_1 , поэтому $OA = OC$.

3) Докажите, что $OB = OC$.

4) Из 2) и 3) следует, что $OA = OB$, т. е. точка O находится на серединном перпендикуляре к отрезку AB .

5) Итак, прямые, содержащие серединные перпендикуляры, пересекаются в одной точке O и $OA = OB = OC$. Это значит, что если провести окружность с центром в точке O и радиусом OA , то она пройдет через все вершины треугольника ABC . Такая окружность — единственная. ■

Мы убедились, что около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Рассмотрим важный частный случай: *центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы.*

Действительно, серединные перпендикуляры к катетам по теореме Фалеса пройдут через середину гипотенузы.

1.3. Вершины треугольника — это три точки, не лежащие на одной прямой. Около треугольника можно описать окружность и только одну. Поэтому через три точки, не лежащие на одной прямой, тоже можно провести окружность и притом только одну. Если же три точки лежат на одной прямой, то серединные перпендикуляры к соответствующим отрезкам параллельны. Это значит, что через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность. Изложенное выше можно сформулировать в виде двух утверждений: 1) окружность определяется тремя точками, не лежащими на одной прямой; 2) прямая не может пересекать окружность более чем в двух точках, то есть прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек.

1.4. Задача. Туристы установили на поляне три палатки. Как найти место для костра, чтобы он находился на равном расстоянии от входа в каждую палатку?

Дано: A, B, C — места расположения палаток. O — место расположения костра (см. рис. 3).

Определить положение костра.

Решение.

1) Если A, B, C — пункты размещения палаток, O — место расположения костра, тогда по условию $OA = OB = OC$.

2) Из условий $OA = OB = OC$ следует, что O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Значит, O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Ответ: костер следует разместить на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющим входы в палатки.



1. Каким свойством обладают все точки прямой, перпендикулярной отрезку AB и делящей этот отрезок пополам?
2. Дайте определение окружности, описанной около треугольника.
3. Сформулируйте и докажите лемму.
4. Сформулируйте и докажите теорему о центре описанной окружности.

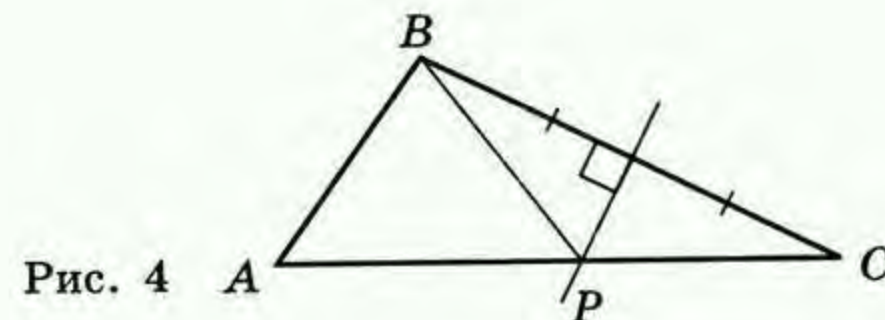


Рис. 4

5. Сколько точек определяют окружность?
6. Могут ли прямая и окружность иметь три общие точки? Ответ обоснуйте.
7. Какую фигуру образуют центры окружностей, проходящих: а) через некоторую точку A ; б) через две данные точки A и B ; в) через три данные точки A, B и C , не лежащие на одной прямой; г) через три данные точки A, B и C , лежащие на одной прямой?
8. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Чему равен радиус описанной около него окружности?
9. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке P (рис. 4). Найдите: а) AP и CP , если $BP = 5$ см, $AC = 8,5$ см; б) AC , если $BP = 11,4$ см, $AP = 3,2$ см.



1. Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. Около каждого из них опишите окружность.

2. В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры сторон AB и BC пересекаются в точке O и $OB = 10$ см. Найдите расстояние от точки O до стороны AC , если $\angle OAC = 30^\circ$.

3. В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры сторон AB и AC пересекаются в точке O и $OA = 8$ см. Найдите площадь треугольника OBC , если $\angle OBC = 60^\circ$.

4. В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры сторон BC и AC пересекаются в точке O . Найдите длину OC , если $AB = 10$ см, $\angle BOA = 120^\circ$.

5. Окружность с центром O и радиусом R описана около треугольника ABC . Найдите сторону AB треугольника, если $R = 16$ см, $\angle AOB = 120^\circ$.

6. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Найдите радиус окружности, если $AC = 24$ см, $\angle COA = 90^\circ$.

7. Основание тупоугольного равнобедренного треугольника равно 24 см, а радиус описанной около него окружности 13 см. Найдите боковую сторону.

8. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2 см, угол при вершине равен 120° . Найдите диаметр описанной окружности.

9. Найдите радиус окружности, описанной около равносностороннего треугольника со стороной 12 см.

10. Найдите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса 4 см.

11. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10 см, 12 см и 10 см.

12. Найдите стороны остроугольного равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, в которую он вписан, 5 см.

13. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 5 см. Может ли периметр треугольника быть равным 30 см?

14. Периметр треугольника равен 20 см. Может ли радиус описанной около него окружности быть равным 3 см?

15. Серединный перпендикуляр к стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке E . Найдите основание AC треугольника, если периметр треугольника AEC равен 27 см, а $AB = 18$ см.

16. Прямые, на которых лежат серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекаются в точке P стороны BC . Докажите, что: а) P — середина стороны BC ; б) $\angle A = \angle B + \angle C$.

17. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 25° . Найдите углы, под которыми видны катеты из центра описанной окружности.

18. Найдите радиус и диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны: а) 20 см и 21 см; б) 40 см и 30 см.

19. Дан тетраэдр $MABC$, у которого $MA = MB = MC$. Отрезок MO пересекает грань ABC в точке O , и он перпендикулярен отрезкам OA , OB , OC . Докажите, что точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC .

20. Дан тетраэдр $MABC$, у которого $MA = MB = MC = 5$ см, $AB = BC = AC = 6$ см. Сравните радиус r окружности, описанной около треугольника ABC , и радиус R окружности, описанной около треугольника MAB .

21. Дан тетраэдр $MABC$. Точка O является центром окружности, описанной около треугольника ABC . Отрезок MO перпендикулярен отрезкам OA , OB , OC . Докажите, что:

а) точка M одинаково удалена от точек A , B , C ; б) любая точка отрезка MO одинаково удалена от точек A , B , C .



22. Найдите радиус окружности, в которую вписан равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной c .

23. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

24. Дан остроугольный треугольник ABC , O — центр описанной около него окружности. $AM \perp BC$. Докажите, что углы BAM и OAC равны.

25. Докажите, что в остроугольном треугольнике центр описанной окружности находится внутри треугольника.

26. Докажите, что в тупоугольном треугольнике центр описанной окружности расположен вне треугольника.

27. Дан тетраэдр $MABC$, у которого $MA = MB = MC$. Отрезок MO соединяет точку M с точкой O ребра AB и перпендикулярен отрезкам OA , OB , OC . Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

§ 2. Свойство высот треугольника

2.1. При построении трех прямых, на которых расположены высоты треугольника, можно заметить, что они пересекаются в одной точке. Докажем это.

Теорема (о свойстве высот треугольника). Три прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Эту точку называют **ортоцентром** треугольника.

Дано: треугольник ABC , $AM \perp BC$, $BP \perp AC$, $CK \perp AB$ (рис. 5).

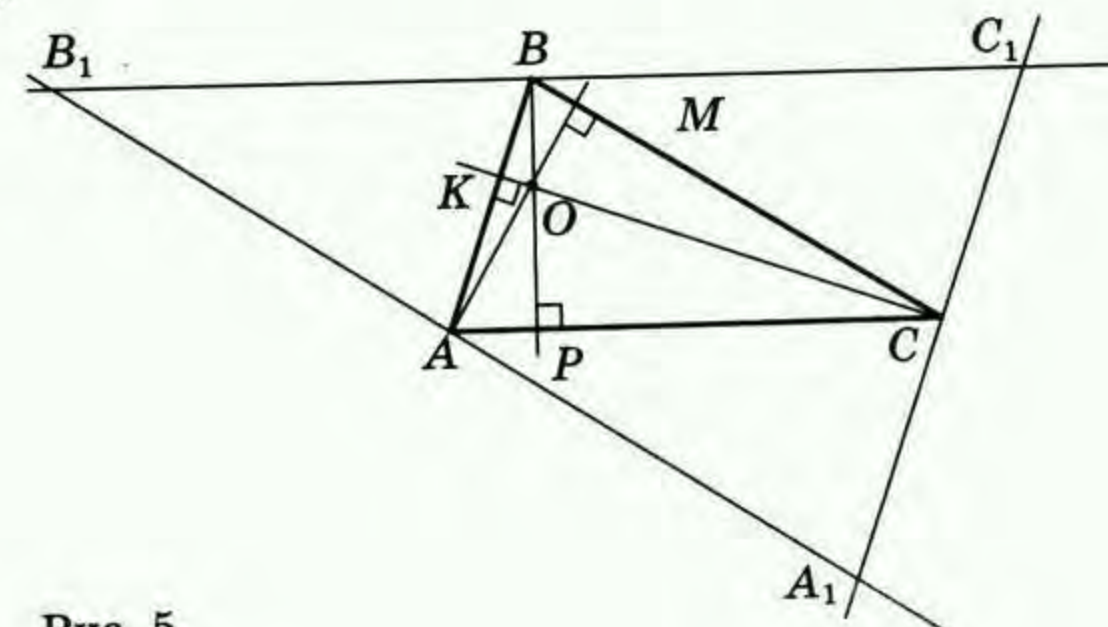


Рис. 5

Доказать: AM , BP и CK пересекаются в одной точке.

Доказательство. 1) Проведем через вершину A прямую, параллельную BC , через B — прямую, параллельную AC , и через C — прямую, параллельную AB . Образовался треугольник $A_1B_1C_1$.

2) Четырехугольник ABC_1C — параллелограмм, следовательно, $AB = CC_1$.

3) Четырехугольник $ABCA_1$ — параллелограмм, следовательно, $AB = CA_1$.

4) Из равенств $AB = CC_1$ и $AB = CA_1$ и условий $CK \perp AB$, $AB \parallel A_1C_1$ следует, что $CC_1 = CA_1$, а CK является серединным перпендикуляром к стороне A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

5) Аналогично доказывается, что $AA_1 = AB_1$ и $BB_1 = BC_1$.

6) AM , BP , CK — серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Они пересекаются в одной точке. Обозначим ее O . ■

2.2. Задача. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине равен 70° . Найдите углы, которые высоты треугольника, проведенные к боковым сторонам, образуют с основанием.

Дано: треугольник ABC , $AB = CB$, $\angle B = 70^\circ$, $CK \perp AB$, $AM \perp BC$ (рис. 6).

Найти: углы KCA и MAC .

Решение.

1) $\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - \angle B) : 2 = (180^\circ - 70^\circ) : 2 = 55^\circ$ (как углы при основании равнобедренного треугольника).

2) В треугольнике KBC $\angle K = 90^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, тогда $\angle C = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

3) В треугольнике BMA $\angle M = 90^\circ$, $\angle B = 70^\circ$, тогда $\angle A = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

4) $\angle KCA = \angle BCA - \angle BCK = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.

5) $\angle MAC = \angle BAC - \angle BAM = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.

Ответ: 35° , 35° .



1. Что называют высотой треугольника?
2. Почему в тупоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины острого угла, лежит вне треугольника?
3. Сформулируйте и докажите теорему о свойстве высот треугольника.

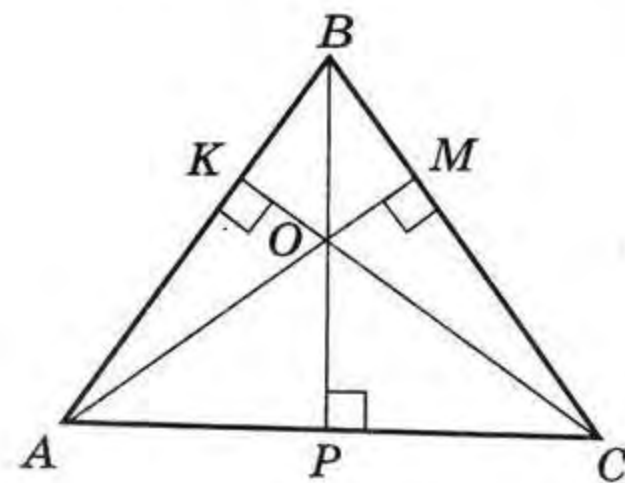


Рис. 6

4. Найдите высоты прямоугольного треугольника, если катеты равны 3 см и 4 см.

5. В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и BP пересекаются в точке O (см. рис. 6). Найдите угол OCA , если $\angle BAC = 58^\circ$.

6. В остроугольном треугольнике ABC высоты AM и CK пересекаются в точке O (см. рис. 6). Найдите угол OBA , если $\angle OCA = 38^\circ$.



28. Начертите три треугольника: остроугольный, прямоугольный и тупоугольный. В каждом из них постройте три прямые, на которых лежат высоты треугольника.

29. В остроугольном треугольнике ABC высоты BP и CK пересекаются в точке O . Найдите угол OAB , если $BC = 2BK$.



30. Вершина A треугольника ABC недоступна (отсутствует ее изображение). Постройте основание высоты AM на стороне BC .

31. Найдите расстояние от ортоцентра равностороннего треугольника до прямых, содержащих его стороны, если сторона равна 12 см.

§ 3. Свойство медиан треугольника

3.1. Проводя на рисунке три медианы треугольника, можно заметить, что они пересекаются в одной точке. Доказательство этого факта основывается на следующей лемме.

Две медианы треугольника пересекаются.

Пересечение медиан AM и CK треугольника ABC следует из того, что AM — внутренний луч угла CAB , CK — внутренний луч угла ACB (рис. 7).

3.2. **Теорема (о свойстве медиан треугольника).** Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении $2:1$, считая от вершины.

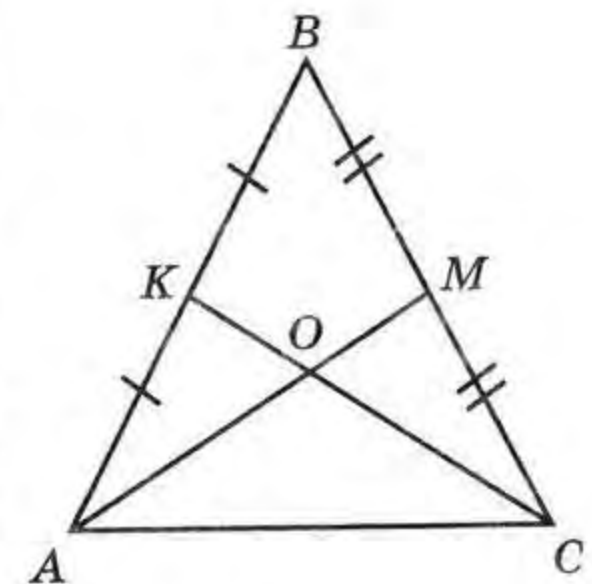


Рис. 7

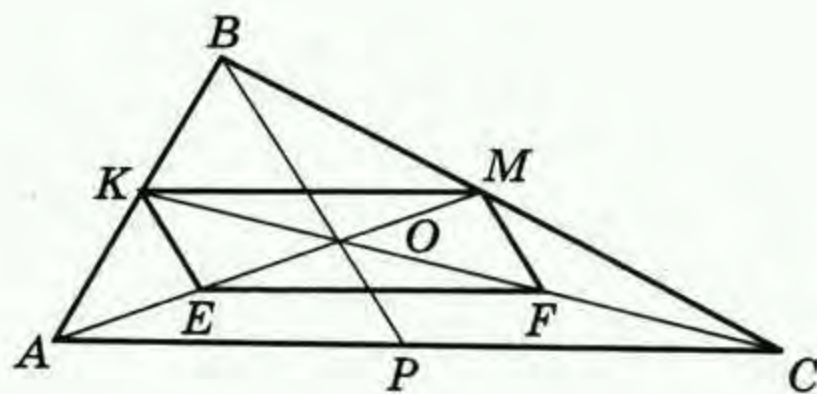


Рис. 8

Дано: треугольник ABC , $AK = KB$, $BM = MC$, $AP = PC$ (рис. 8).

Доказать: $AM \cap BK \cap CP = O$,

$$AO : OM = CO : OK = BO : OP = 2 : 1.$$

Доказательство. 1) Медианы AM и CK пересекаются по лемме: $AM \cap CK = O$.

2) $AK = KB$ и $BM = MC$, это значит, что KM — средняя линия треугольника ABC ; следовательно, $KM \parallel AC$ и $KM = \frac{1}{2} AC$.

3) Разделим AO и CO пополам: $AE = EO$ и $CF = FO$; тогда EF — средняя линия треугольника AOC , следовательно, $EF \parallel AC$ и $EF = \frac{1}{2} AC$.

4) Из условий $KM \parallel AC$, $KM = \frac{1}{2} AC$ и $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2} AC$ следует, что $KM \parallel EF$ и $KM = EF$, т. е. четырехугольник $KMFE$ — параллелограмм.

5) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, т. е. $MO = EO$. Но $EO = AE$. Это значит, что $AE = EO = OM$ и $OM = \frac{1}{3} AM$ или $OM = \frac{1}{2} AO$, т. е. $AO : OM = 2 : 1$.

6) Докажите, что $CO : OK = 2 : 1$.

7) Аналогично доказывается, что третья медиана BP делит медиану AM тоже в отношении $2 : 1$, следовательно, она пройдет через точку O . Кроме того, $BO : OP = 2 : 1$. ■

Точку пересечения медиан называют **центром тяжести треугольника**. Обоснование такого названия дается в механике.

3.3. Задача. В треугольнике ABC медианы AM и CK пересекаются в точке O . Докажите, что треугольник AOC равнобедренный, если $AO = 6$ см, $OK = 3$ см.

Дано: треугольник ABC , $BM = MC$, $AK = KB$, $AO = 6$ см, $KO = 3$ см (см. рис. 7).

Доказать: треугольник AOC — равнобедренный.

Доказательство.

1) $OC : OK = 2 : 1$ (по свойству медиан треугольника), тогда $CO = 2 OK = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

2) $CO = OA = 6$ см, значит, треугольник AOC равнобедренный. ■



1. Что называют медианой треугольника?

2. Сформулируйте и докажите лемму и теорему о свойстве медиан треугольника.

3. BP — медиана равностороннего треугольника ABC , O — точка пересечения его медиан. Найдите OB , OP , OA и OC , если $BP = 9$.

4. Докажите теорему о свойстве медиан треугольника, используя подобие треугольников ABC и KBM , AOC и KOM (см. рис. 8).

5. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена медиана AM , O — центр тяжести треугольника (рис. 9). Докажите, что AOC — равнобедренный треугольник. Найдите его боковую сторону, если $AM = 15$ см, $AC = 12$ см.

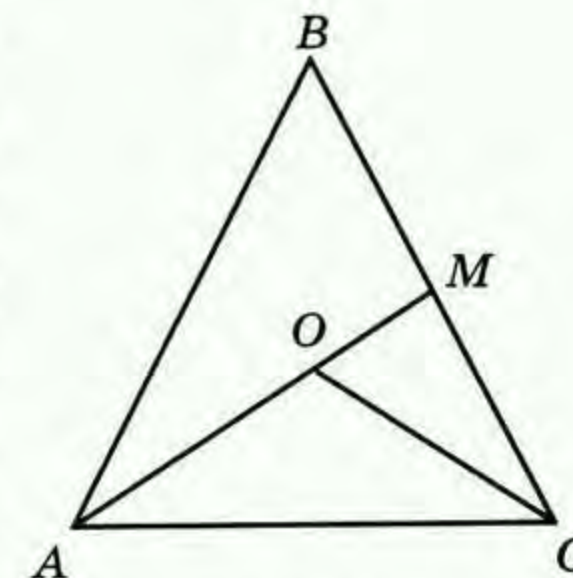


Рис. 9



32. Постройте треугольник и проведите в нем три медианы.

33. В треугольнике ABC медианы AM и BP пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите: а) площадь треугольника AOB , если $AM = 18$ см, $BP = 24$ см; б) стороны треугольника, если $AM = 9$ см, $BP = 12$ см.

34. Докажите, что треугольник, у которого равны две медианы, является равнобедренным.

35. В треугольнике ABC медианы AM и CK пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите OB , если $AM = 36$ см, $CK = 15$ см.



36. Через центр тяжести треугольника ABC проведена прямая, параллельная AC . Эта прямая пересекает сторону BC в точке M . Найдите BC , если: а) $MC = 2$; б) $MC = 5$; в) $MC = c$.

37. Постройте треугольник по трем его медианам.

38. Дан тетраэдр $MAVC$, у которого $MA = MB = MC$. Точка O является центром тяжести треугольника ABC . Отрезок MO перпендикулярен отрезкам OA , OB , OC . Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

39. У тетраэдра $MAVC$ грань ABC является равносторонним треугольником. Точка O — центр описанной около него окружности. Отрезок MO перпендикулярен отрезкам OA , OB , OC . Докажите, что точка M одинаково удалена от прямых, содержащих стороны треугольника ABC .

§ 4. Взаимное расположение прямой и окружности

4.1. Пусть дана окружность с центром O и радиусом R , а также прямая; расстояние от центра окружности до прямой равно d . Наглядные соображения подсказывают, что возможны три случая взаимного расположения прямой и окружности (рис. 10, а, б, в). Каждому из этих расположений соответствуют следующие соотношения между d и R : 1) $d > R$, 2) $d = R$, 3) $d < R$. Докажем это.

4.2. Прямая может не иметь с окружностью ни одной общей точки. Таковы все прямые, расстояния до которых от центра окружности больше радиуса этой окружности ($d > R$). В самом деле, если $OP \perp AB$ и $d = OP > OC = R$ (рис. 10, а) то точка P лежит вне окружности и любая точка M прямой AB также лежит вне окружности, так как $OM > OP$ (наклонная больше перпендикуляра, гипотенуза больше катета). Построить такую прямую не представляет затруднения.

4.3. Прямая может иметь с окружностью только одну общую точку. В этом случае ее называют касательной к окружности. Дадим определение. *Прямую, имеющую с окружностью*

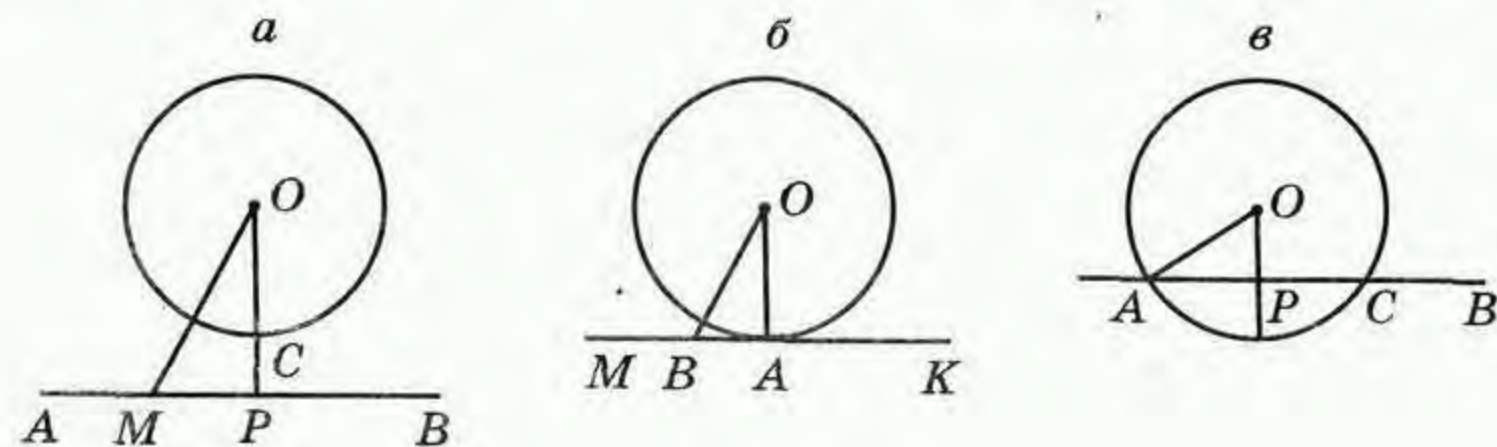


Рис. 10

ностью единственную общую точку, называют касательной к окружности. Общую их точку называют точкой касания. Построить такую прямую можно следующим образом. Проведем произвольный радиус окружности OA (рис. 10, б), проводим через точку A прямую MK , перпендикулярную к OA . Прямая MK и будет искомой касательной. В самом деле, так как $MK \perp OA$, то расстояние до всякой точки B прямой MK от центра окружности больше радиуса OA , т. е. $OB > OA$. А потому все точки прямой MK , кроме точки A , лежат вне окружности, т. е. прямая MK имеет с окружностью лишь одну общую точку A .

Теорема (признак касательной). *Прямая, перпендикулярная к радиусу в конце его, отличном от центра окружности, есть касательная.*

Для этой теоремы верна и обратная (о свойстве касательной): *Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.*

В самом деле, предположим, что MK — касательная к окружности в точке A . Докажем, что $MK \perp OA$ (см. рис. 10, б).

Все точки прямой MK , кроме точки A , лежат вне окружности. Поэтому для всякой точки B этой прямой $OB > OA$. Значит, радиус OA есть наименьший из всех отрезков, соединяющих центр O со всеми точками прямой MK , следовательно, $OA \perp MK$ ($d = R$). ■

4.4. Прямая может пересекать окружность в двух точках. В этом случае ее называют секущей. Такова, например, всякая прямая AB , проходящая через конец радиуса OA (рис. 10, в) и не перпендикулярная к нему. В самом деле, прямая AB не может иметь с окружностью лишь одну общую точку A , так как в этом случае она была бы перпендикулярна к радиусу OA . Но больше двух общих точек прямая и окружность иметь не могут (как это утверждалось в пункте 1.3. § 1). Следовательно, кроме точки A , прямая AB имеет с окружностью еще одну общую точку C . Так как AO является наклонной к AB , то перпендикуляр OP меньше AO , т. е. расстояние от центра O к прямой AB меньше радиуса ($d < R$).

4.5. **Задача.** Из данной точки A , удаленной от центра окружности $\omega (O; r)$ на расстояние, большее чем r , провести касательную к этой окружности.

Решение. Радиусом, равным AO , описываем из точки A , как из центра, дугу окружности. Радиусом, равным

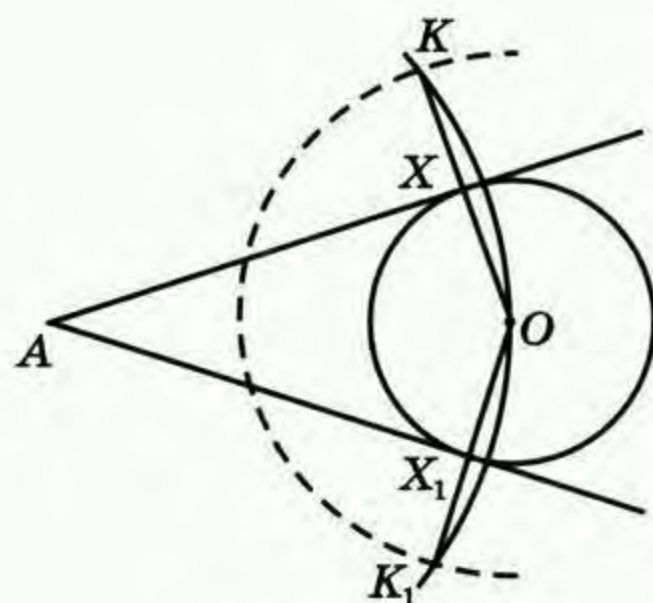


Рис. 11

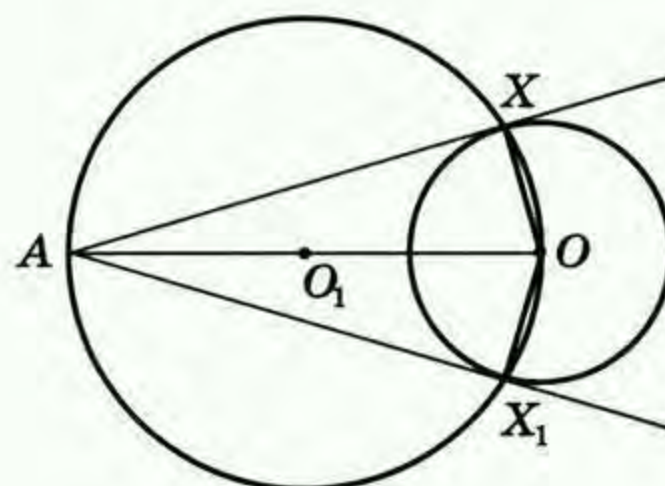


Рис. 12

диаметру данной окружности, описываем из центра O вторую дугу. Эти дуги пересекаются в двух точках K и K_1 (рис. 11). Соединим точку K с центром O . Прямая OK пересекает окружность в точке X . Прямая AX есть искомая касательная. Сделав такое же построение для точки K_1 , получим вторую касательную AX_1 . Дайте необходимые обоснования.

Решение задачи можно описать и так:

- 1) $\omega(A; AO)$;
- 2) $\omega(O; 2r)$;
- 3) $\omega(A; AO) \cap \omega(O; 2r) = K, K_1$;
- 4) $OK \cap \omega(O; r) = X, OK_1 \cap \omega(O; r) = X_1$;
- 5) AX и AX_1 — искомые касательные.

Найдите второе решение задачи с помощью рисунка 12.



1. Докажите, что прямая и окружность могут занимать следующие положения одна относительно другой: а) прямая отстоит от центра на расстоянии, большем радиуса; такая прямая и окружность не имеют общих точек; б) прямая отстоит от центра на расстоянии, равном радиусу; такая прямая имеет с окружностью единственную общую точку и называют касательной; в) прямая отстоит от центра на расстоянии, меньшем радиуса; такая прямая пересекает окружность в двух точках и носит название секущей.
2. Сформулируйте и докажите признак касательной и теорему о свойстве касательной.
3. Как из данной точки окружности провести к ней касательную?
4. В треугольнике ABC угол A прямой. Докажите, что прямая AC касается окружности с центром в точке B и радиусом AB .
5. Даны окружность с центром O и радиусом 4,5 см и точка A такая,

что $OA = 9$ см. Из точки A проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними (см. рис. 11).

6. Прямая AB касается окружности с центром O и радиусом 5 см в точке A . Найдите OB , если $AB = 12$ см (рис. 13).

7. Прямая AB касается окружности с центром O и радиусом 3 см в точке A . Найдите AB , если $OB = 5$ см (см. рис. 13).

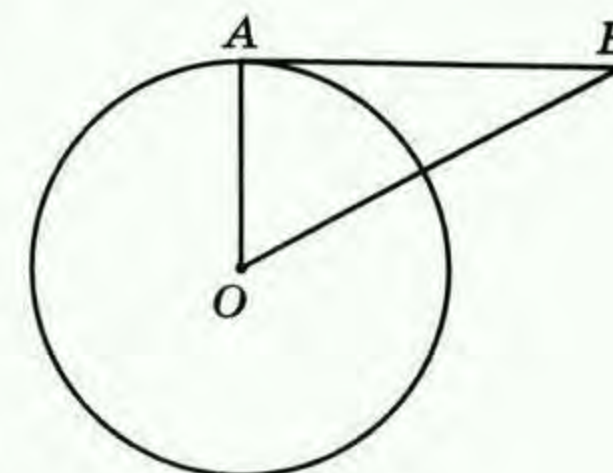


Рис. 13



40. Из точки M , лежащей вне данной окружности, проведите две касательные MA и MB , где A, B — точки касания. O — центр окружности. Докажите, что $MA = MB$, MO — биссектриса угла, образованного касательными MA и MB .

41. Из точки A к окружности с центром O и радиусом 8 см проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания). Найдите AB и AC , если $\angle BAC = 60^\circ$.

42. Из точки M к окружности с центром O проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания). Найдите AM и BM , если $\angle AMB = 90^\circ$, $OM = 10$ см.

43. Из точки M к окружности с центром O и радиусом 8 см проведены касательные AM и BM (A и B — точки касания). Найдите периметр треугольника ABM , если $\angle AOB = 120^\circ$.

44. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AB и AC (B и C — точки касания). Найдите периметр треугольника ABC , если $OA = 12$ см, $\angle BOC = 60^\circ$.

45. Через концы хорды AB , равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке M . Найдите угол AMB .

46. Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30° . Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке P . Докажите, что треугольник ACP — равнобедренный.

47. Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не пер-

Навукова-педагогічна бібліотека

Навукова-педагогічна бібліотека
Навукова-метадичнай установы
«Нацыянальны інстытут адукацыі»

Навукова-педагогічная бібліотека
Навукова-метадичнай установы
«Нацыянальны інстытут адукацыі»

пендикулярна к диаметру AB . Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1 .



48. Постройте касательную к окружности: а) параллельную данной прямой; б) перпендикулярную к данной прямой.

49. Докажите, что через точку не может проходить больше двух касательных к данной окружности.

50. К двум окружностям, расположенным одна вне другой, проведите четыре общие касательные.

§ 5. Свойство биссектрис треугольника

5.1. В окружности $\omega (O; r)$ построим три радиуса OM, OP, OK , каждая пара которых образует тупой угол (рис. 14). Че-

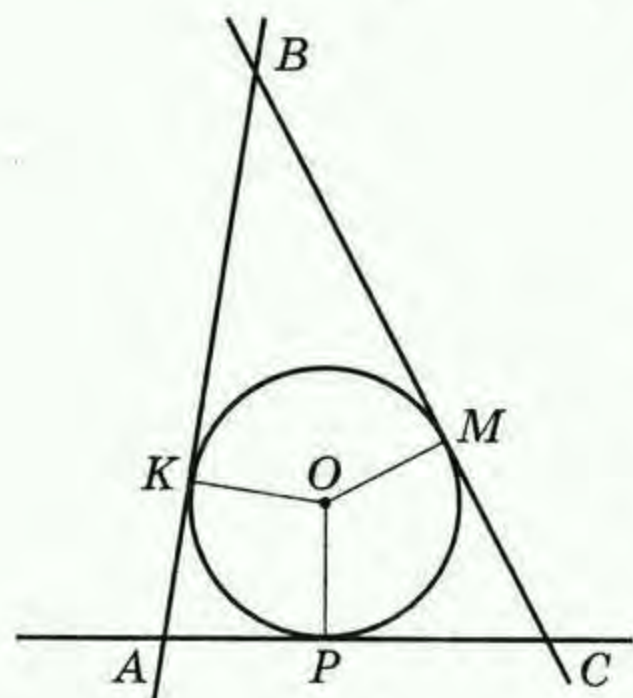


Рис. 14

рез концы каждого радиуса проведем перпендикулярные им прямые. Они попарно пересекутся в точках A, B, C . В образовавшемся треугольнике ABC каждая сторона касается окружности в точках M, P, K . Такой треугольник называют описанным, а окружность вписанной. Дадим определение. **Треугольник называют описанным около окружности, а окружность вписанной в треугольник, если все стороны треугольника касаются окружности.**

5.2. Теорема (о центре вписанной окружности). **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром вписанной окружности.**

Дано: треугольник ABC , AM, BP, CK — биссектрисы углов A, B, C (рис. 15).

Доказать: $AM \cap BP \cap CK = O$; точка O равноудалена от сторон треугольника.

Доказательство. 1) Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке, лежащей внутри треугольника (докажите эту лемму самостоятельно): $AM \cap CK = O$.

2) По свойству биссектрисы точка O одинаково удалена от сторон AC и AB .

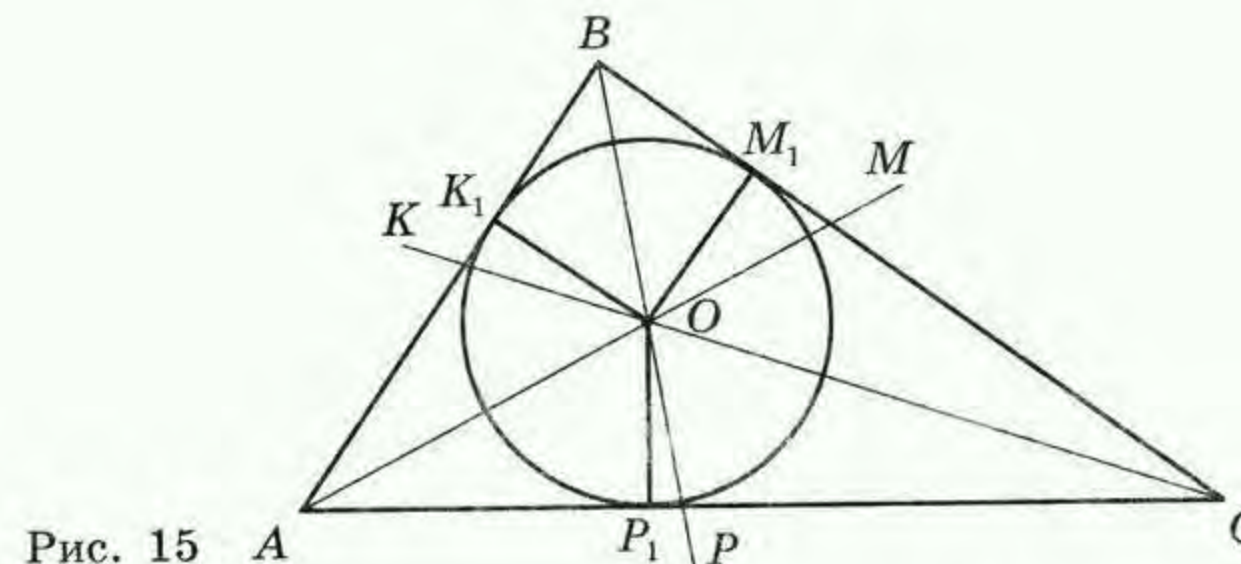


Рис. 15

3) Точка O одинаково удалена от сторон CA и CB , т. е. если $OP_1 \perp AC$ и $OM_1 \perp BC$, то $OP_1 = OM_1$;

4) Из 2) и 3) следует, что точка O одинаково удалена от сторон BA и BC , и так как она лежит внутри угла B , то она находится и на биссектрисе этого угла. Это означает, что все биссектрисы пересекаются в одной точке.

5) Если провести окружность с центром O и радиусом, равным расстоянию от точки O до какой-либо стороны, то она по признаку касательной будет касаться всех сторон треугольника. ■

Мы убедились, что во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

5.3. Две окружности могут не иметь общих точек, могут иметь одну общую точку, могут иметь две общие точки. (Соответствующие рисунки сделайте самостоятельно.) **Две окружности называют касающимися, если они имеют единственную общую точку. Эту точку называют точкой касания.**

Если одна из касающихся окружностей расположена внутри другой (то есть в части плоскости, ограниченной второй окружностью), то касание называют **внутренним**, а в противном случае — **внешним** (рис. 16, а, б). **Прямую, проходящую**

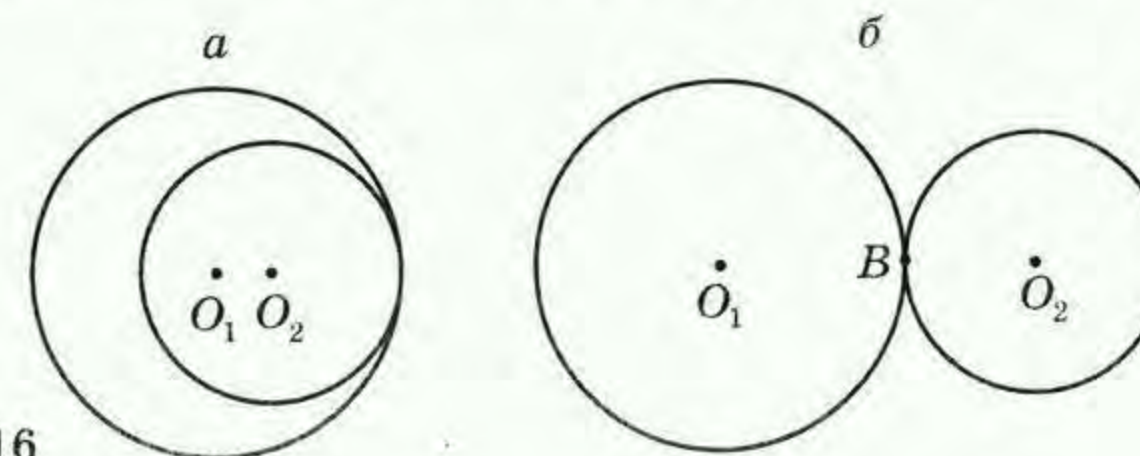


Рис. 16

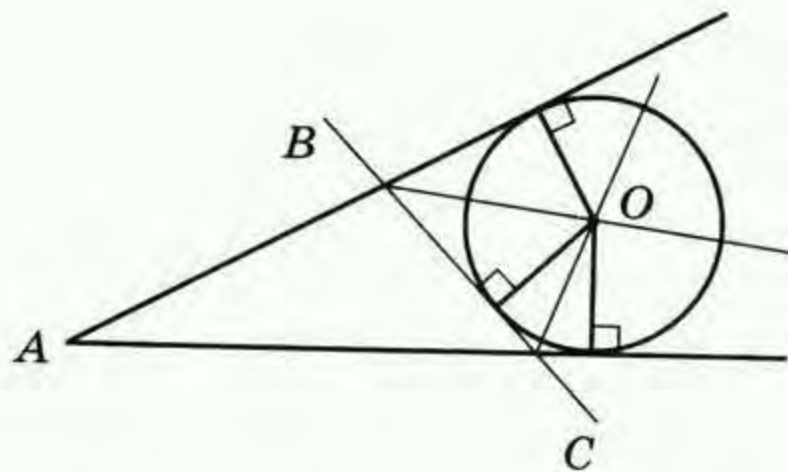


Рис. 17

через центры двух окружностей, называют линией центров.

5.4*. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжения двух других, называют внеписанной (рис. 17). Таких окружностей для любого треугольника может быть три. Они расположены *вне* треугольника. Центрами этих окружностей являются точки пересечения биссектрис внешних углов.

5.5. Задача. Докажите, что площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности.

Дано: треугольник ABC , a , b , c ; $\omega(O; r)$ — вписанная окружность (рис. 18).

Доказать: $S = p \cdot r$.

Доказательство. Соединим центр вписанной окружности O с вершинами треугольника. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB , BOC , COA , за основания которых примем стороны треугольника ABC , тогда высотами будут радиусы вписанной окружности.

Получим: $S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = p \cdot r$. Отсюда $r = \frac{S}{p}$.

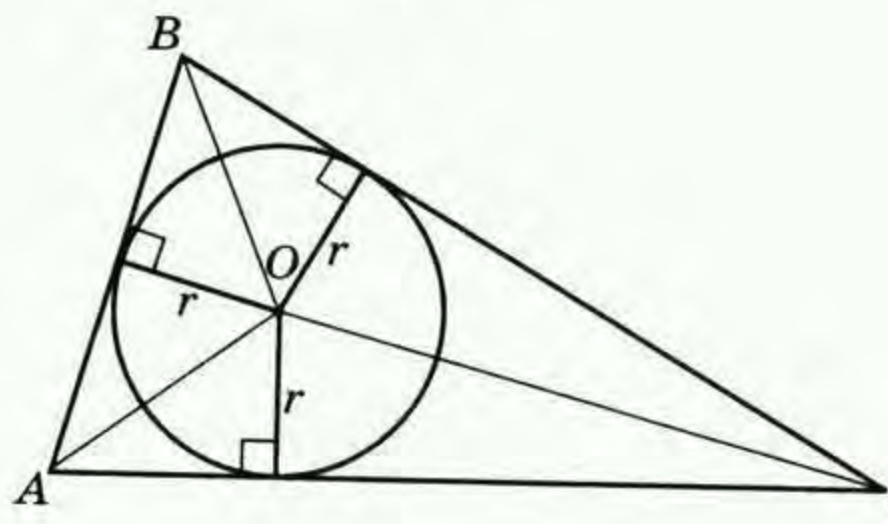


Рис. 18



1. Что называют биссектрисой угла и биссектрисой треугольника?
2. Каким геометрическим местом точек является биссектриса выпуклого угла?
3. Дайте определение треугольника, описанного около окружности и окружности, вписанной в треугольник.
4. Сформулируйте и докажите теорему о центре вписанной окружности.
5. Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности.
6. Докажите, что центры вписанной в равносторонний треугольник и описанной около него окружностей совпадают.
7. Радиус окружности равен 4 см, а расстояние от точки A до центра 7 см. Чему равно кратчайшее расстояние от точки A до точек окружности?



51. Найдите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной 12 см.

52. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен 12 см. Найдите сторону этого треугольника.

53. Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

54. Радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности равен r . Найдите радиус описанной окружности и сторону треугольника.

55. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания вписанной в этот треугольник окружности в отношении 7 : 5, начиная от его вершины, лежащей напротив основания треугольника. Найдите отношение боковой стороны к основанию.

56. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 15 см, 24 см и 15 см.

57. Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см, а радиус вписанной окружности — 4 см.

58. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c , а сумма катетов равна a . Найдите диаметр вписанной окружности.

59. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30° . Найдите меньшую сторону треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 4 см.

60. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60° , а расстояние от центра вписанной окружности до вершины этого угла равно 10 см. Найдите большую сторону треугольника.

61. В равнобедренном треугольнике точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки длиной 12 см и 3 см, считая от основания. Найдите площадь треугольника.

62. Найдите формулу, по которой, зная катеты прямоугольного треугольника, можно вычислить радиус вписанной окружности.

63. Даны катеты прямоугольного треугольника: $CB = 3$ см, $CA = 4$ см. Найдите расстояние от вершины C до ближайшей точки вписанной окружности.

64. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме катетов.

65. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между их центрами. Рассмотрите все возможные случаи.

66. Могут ли касаться две окружности, если их радиусы равны 25 см и 50 см, а расстояние между их центрами равно 60 см?



67. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

68. Постройте равносторонний треугольник по радиусу вписанной окружности.

69. Найдите площадь прямоугольного треугольника, не находя его катетов, зная, что гипотенуза равна 13 см, а радиус вписанной в него окружности равен 2 см.

70. Каждая из трех равных окружностей радиуса r касается двух других. Найдите площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

71. Две окружности внешне касаются одна другой и внутренне — третьей окружности, радиус которой равен R . Найдите периметр треугольника, вершины которого — центры этих трех окружностей.

72. Через общую точку двух внешне касающихся окружностей проведена секущая. Докажите, что радиусы, проведенные в крайние точки пересечения секущей с окружностями, параллельны.

73. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и 12 см. Найдите расстояние между центрами описанной и вписанной окружностей.

74. Дан тетраэдр $MAVC$, у которого $MA = MB = MC = 5$ см, $AB = BC = AC$. Окружность с центром в точке O вписана в треугольник ABC . Найдите: а) радиус этой окружности; б) площадь треугольника ABC , если отрезок MO перпендикулярен отрезкам OA , OB , OC и равен 4 см.

75. Боковыми гранями пирамиды $MAVC$ являются равные треугольники с прямым углом при вершине M . Боковое ребро равно $\sqrt{2}$ см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Задачи к главе I



76. Площадь прямоугольного треугольника равна 84 см^2 , а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, 3 см. Найдите катеты треугольника.

77. В треугольник вписана окружность; точками касания она делится на три дуги; к каждой из них проведено по касательной; эти касательные отсекают от треугольника три треугольника. Докажите, что сумма периметров этих треугольников равна периметру данного.

78. Постройте треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания.

79. Даны прямая a , точка A , лежащая на этой прямой, и точка B , не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A .

80. Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.



81. Постройте треугольник ABC , если даны:

- а) R , c , a ;
- б) R , c , угол A ;

- в) r, c , угол A ;
 г) r, a, h_c ;
 д) r_a, c , угол A .

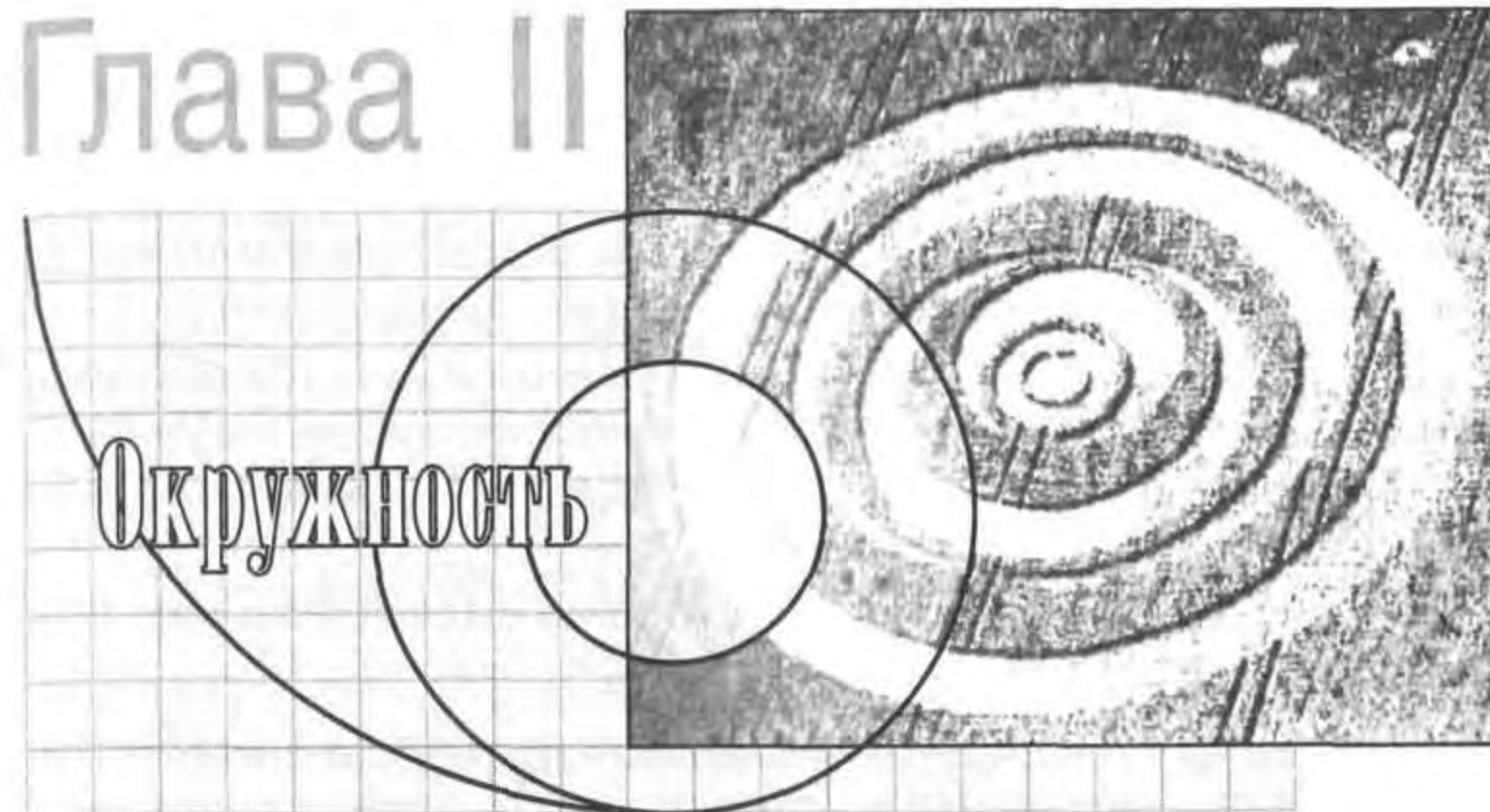
Обозначения: R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, h_c — высота, проведенная из вершины C , r_a — радиус внеписанной окружности, касающейся стороны a .

82. Докажите, что радиус внеписанной окружности, касающийся стороны a треугольника ABC , находится по формуле: $r_a = \frac{S}{p-a}$.

83. Даны три высоты треугольника h_1, h_2, h_3 . Найдите радиус вписанной окружности.

84. Периметр прямоугольного треугольника равен 12 дм, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 24 см. Найдите больший катет треугольника.

Глава II



§ 6. Углы, вписанные в окружность

6.1. Пусть задана окружность $\omega(O; r)$. Из ее центра проведем два луча OA и OB . Они образуют два угла, называемые **центральными**. Так, на рисунке 19 один из этих углов выпуклый (он заштрихован), а второй невыпуклый. Часть окружности, расположенная внутри одного из двух образовавшихся углов, называют **дугой окружности**, соответствующей этому центральному углу. **Градусной величиной дуги** окружности называют градусную величину соответствующего центрального угла. В дальнейшем словами «дуга окружности» будем называть и саму дугу, и ее градусную величину. Дугу окружности будем обозначать так: $\overset{\frown}{AB}$.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называют вписанным в окружность. На рисунке 20 углы ABC , AB_1C и AB_2C впи-

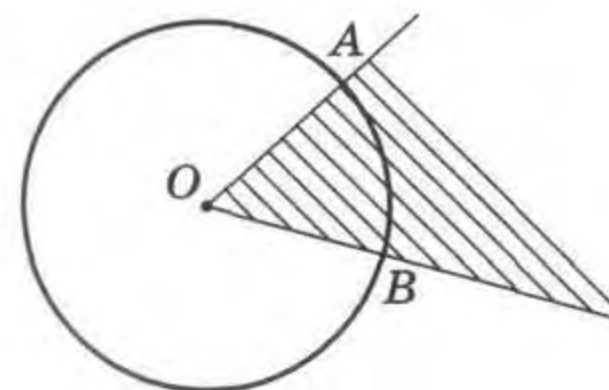


Рис. 19

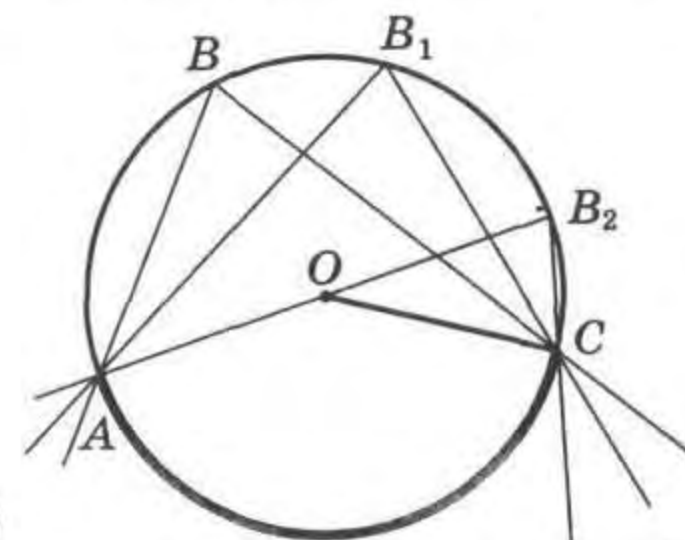


Рис. 20

саны в окружность. Говорят также, что все эти углы опираются на одну и ту же дугу AC (на чертеже она выделена «жирной» линией).

Центральный угол, опирающийся на ту же дугу, что и вписанный угол, называют центральным углом, *соответствующим данному вписанному углу*.

6.2. Теорема (о величине вписанного угла). Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла. Иногда говорят, что он равен половине дуги, на которую опирается.

Дано: угол ABC вписан в окружность $\omega (O; R)$ (см. рис. 20).

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

Доказательство. Возможны три случая расположения центра окружности относительно вписанного угла (рис. 21).

1. Центр окружности находится на одной из сторон угла.
2. Центр окружности находится внутри вписанного угла.
3. Центр окружности находится вне вписанного угла.

Других случаев расположения центра окружности относительно вписанного угла нет. Доказав утверждение для каждого из трех возможных случаев, мы сможем утверждать, что теорема верна. В этом заключается *метод полной индукции*. Суть его в том, что доказывается утверждение теоремы для всех возможных случаев.

1. Пусть центр окружности находится на одной из сторон угла (рис. 21, а).

1) Треугольник AOB — равнобедренный ($OA = OB = R$). Следовательно, у него $\angle OAB = \angle ABO$.

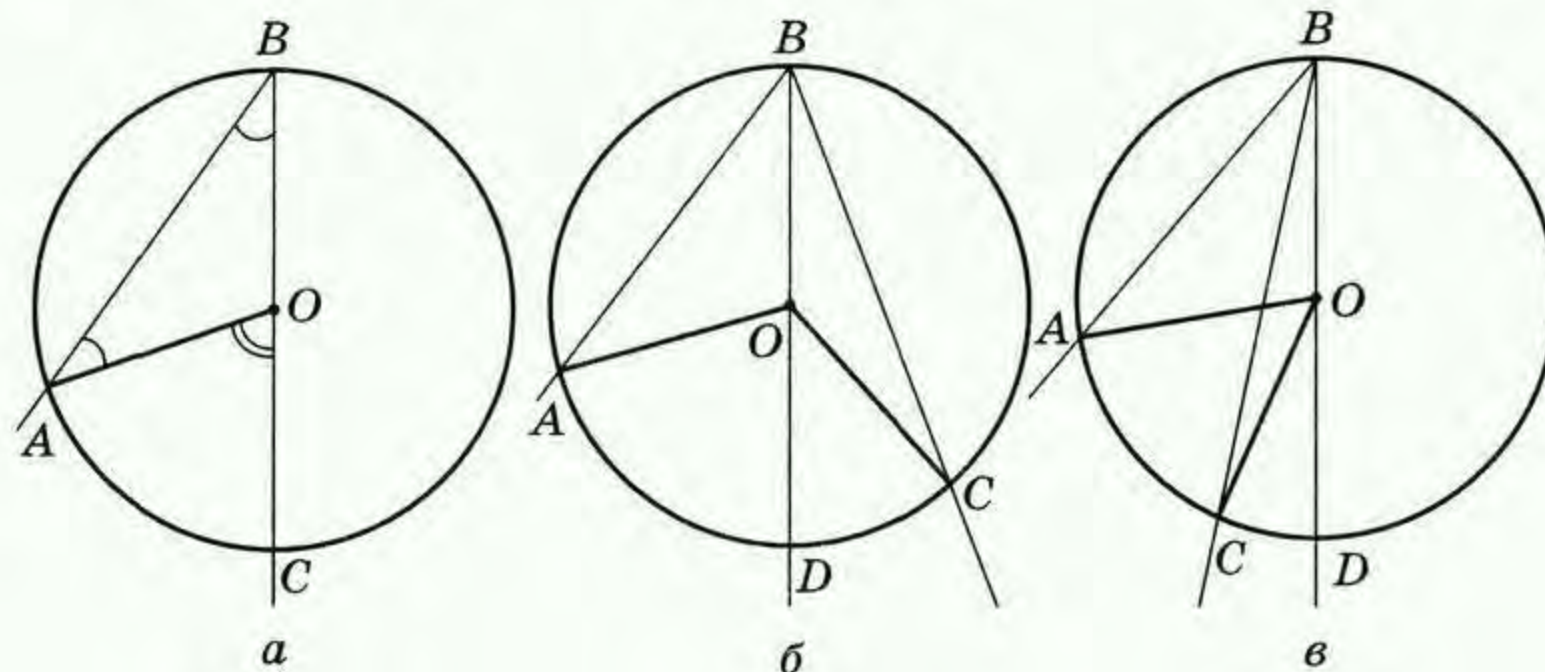


Рис. 21

2) Угол AOC — внешний для этого треугольника. Следовательно, $\angle OAB + \angle ABC = \angle AOC$.

3) В силу того, что $\angle OAB = \angle ABC$, из последнего равенства имеем: $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

2. Пусть центр окружности находится внутри угла (рис. 21, б).

1) Проведем луч BD через центр окружности.

2) По доказанному в первой части теоремы имеем $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle DOC$. Сложив эти два равенства, получим: $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$.

3. Пусть центр окружности находится вне угла (рис. 21, в).

1) Проведем луч BD через центр окружности и лучи OA и OC .

2) По доказанному в первой части теоремы имеем $\angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD$, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$.

Вычтя из первого равенства второе, получим: $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$. ■

Следствие 1. Вписанные углы, стороны которых проходят через некоторые точки A и C окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AC , равны.

Так, на рисунке 20 углы ABC , AB_1C и AB_2C равны.

Следствие 2. Вписанные углы, опирающиеся на диаметр окружности, прямые.

6.3*. Из точки A отрезок BC виден под углом α , если $\angle BAC = \alpha$.

Доказанная теорема и следствие 1 из нее позволяют сформулировать и доказать следующие утверждения:

Геометрическим местом точек, из которых отрезок AB виден под заданным углом α , являются две дуги окружностей равных радиусов, построенные описанным ниже способом, с центрами по разные стороны от прямой AB и опирающиеся на отрезок AB (рис. 22).

Примечание. Концы дуг в рассматриваемое геометрическое место точек не входят.

Как построить эти дуги?

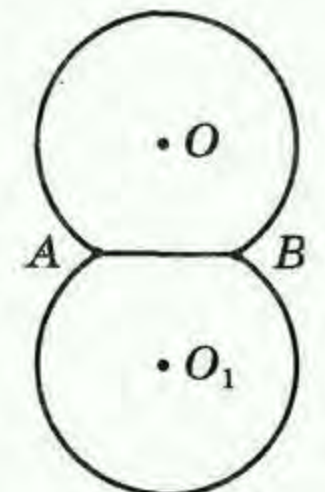


Рис. 22

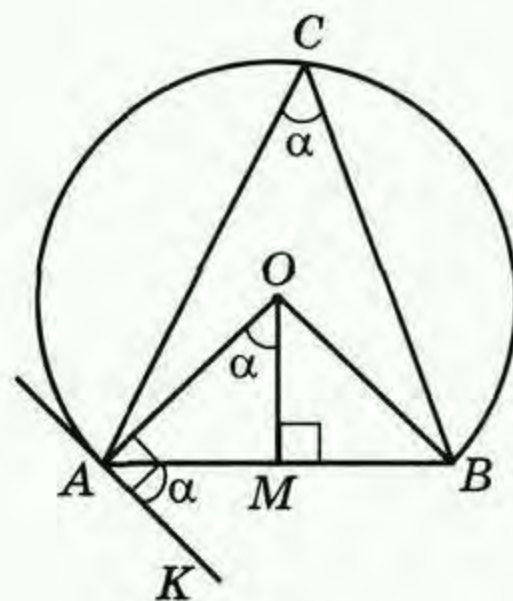


Рис. 23

Анализ. 1) Пусть $\angle ACB = \alpha$. Тогда $\angle AOB = 2\alpha$ (рис. 23).

2) Проведем $OM \perp AB$. $\angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOB = \alpha$ (OM — высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, следовательно, она будет и его биссектрисой).

3) $\angle OAM = 90^\circ - \alpha$ (у прямоугольного треугольника сумма острых углов равна 90°).

4) Проведем $KA \perp OA$; $\angle KAM = \alpha$ ($\angle KAM = 90^\circ - \angle MAO = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$).

На основании проведенного анализа можно выполнить построение.

Построение. 1) Строим $\angle BAK = \alpha$ (рис. 24).

2) Проведем l : $A \in l$, $l \perp AK$.

3) Проведем серединный перпендикуляр s к отрезку AB . Обозначим точку пересечения его с прямой l через O . Точка O — центр одной из искомых окружностей.

4) Отобразив точку O симметрично относительно прямой AB , получим центр O' второй окружности.

5) Радиусом OA из точек O и O' проводим искомые дуги.

В дальнейшем геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом α , будем обозначать так: $\Omega(AB, \alpha)$.

6.4. Следствие 3. Если из точки, взятой на окружности, проведены к ней два луча, один из которых принадлежит касательной, а второй секущей, то величина образованного ими угла равна половине дуги, заключенной между ними.

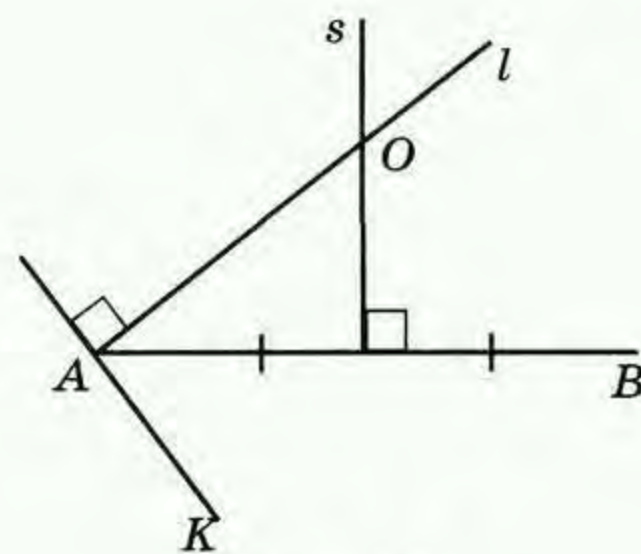


Рис. 24

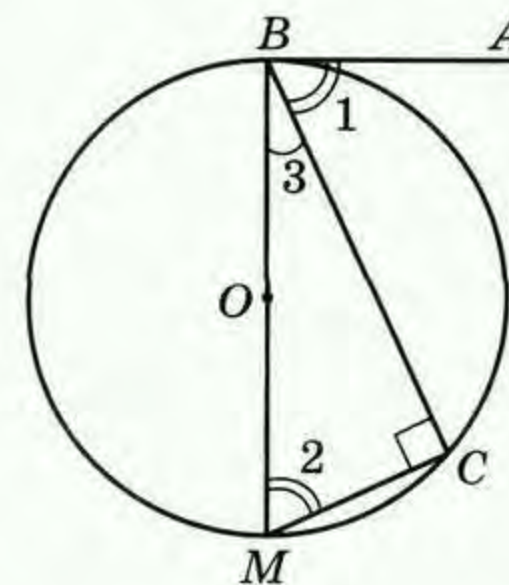


Рис. 25

Доказательство. Пусть ABC — рассматриваемый угол (рис. 25). Проведем диаметр BM . По следствию 2 $\angle BCM = 90^\circ$.

1) Тогда $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ (как сумма острых углов прямоугольного треугольника);

2) $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$ (поскольку касательная BA перпендикулярна диаметру BM);

3) Из равенств 1) и 2) получаем, что $\angle 1 = \angle 2$. Но угол 2 равен половине

дуги BC (как вписанный угол), следовательно, половине этой дуги равен и угол 1. ■

6.5. Задача 1. На отрезке AC как на диаметре построена окружность. Докажите, что если точка B лежит внутри окружности, то угол ABC — тупой.

Дано: AC — диаметр окружности ω , точка B лежит внутри окружности.

Доказать: $\angle ABC > 90^\circ$.

Доказательство. Обозначим точку пересечения прямой BC с окружностью через M . Соединим точки M и A .

1) $\angle M = 90^\circ$ (он опирается на диаметр окружности).

2) Угол ABC внешний для треугольника AMB , следовательно, $\angle ABC > \angle AMC$ (по свойству внешнего угла треугольника). Но $\angle M = 90^\circ$, следовательно, $\angle ABC > 90^\circ$. Чертеж сделайте самостоятельно.

Задача 2*. На окружности $\omega(O, R)$ даны две точки A и B . Найдите на ней такую точку Q , чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B равнялась бы данному отрезку p .

Анализ. Пусть Q — искомая точка, тогда точки A, B, Q являются вершинами треугольника BAQ (рис. 26).

1) На луче AQ построим точку Z такую, что $ZA = p$.

2) Строим треугольник AZB .

3) У построенного треугольника $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle 3 = \frac{1}{4} \angle AOB$.

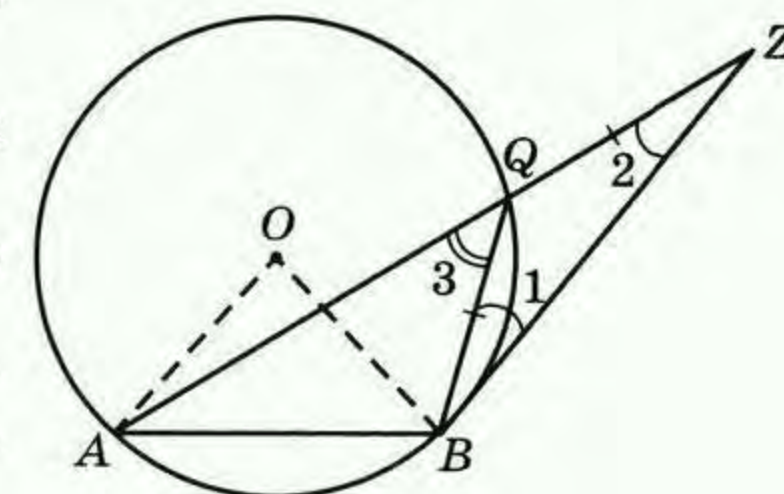


Рис. 26

4) Точка Z принадлежит двум множествам:

а) $\Omega\left(AB, \frac{1}{2} \text{ угла } BQA\right)$; б) $\omega(A, p)$.

Построение.

1) $\Omega\left(AB, \frac{1}{2} \text{ угла } BQA\right)$, где $\angle BQA = \frac{1}{2} \angle AOB$.

2) $Z = \Omega\left(AB, \frac{1}{2} \text{ угла } BQA\right) \cap \omega(A, p)$.

3) $Q = \omega(O, R) \cap AZ$.

4) Треугольник BQA , где вершина Q — искомая точка.

Докажите, что построенный треугольник BQA — искомый.

Исследование проведите самостоятельно.



1. Что называют дугой окружности?
2. Что называют градусной величиной дуги окружности?
3. Какой угол называют вписанным в окружность?
4. Какой угол называют центральным?
5. Какой центральный угол называют соответствующим данному вписанному углу?
6. Сформулируйте и докажите теорему о величине вписанного угла.
7. Что вы можете сказать о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу? Всегда ли они будут равны?
8. Что вы можете сказать об углах, опирающихся на диаметр окружности?
- 9*. Что будет геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под заданным углом? Как строится такое геометрическое место точек?
- 10*. Что будет геометрическим местом точек, из которых отрезок AB виден под данным тупым углом?
- 11*. Что будет геометрическим местом точек, из которых отрезок виден под данным прямым углом?
12. Из точки окружности проведены к ней касательная и секущая. Найдите угол между ними, если секущая отсекает дугу, равную 60° . Сколько решений имеет задача?
13. Из точки A окружности проведены к ней касательная и секущая, пересекающие окружность в точке B . Найдите величину угла, образованного ими, если величина вписанного угла, опирающегося на дугу AB : а) равна 70° ; б) равна 140° .
14. Из точки A окружности проведены к ней касательная и секущая, пересекающие окружность в точке B . Найдите величину угла, образованного ими, если величина центрального угла, опирающегося на дугу AB : а) равна 70° ; б) равна 140° .
15. Найдите углы, образуемые часовой и минутной стрелками, если часы показывают: а) 3 часа; б) 2 часа; в) 5 часов.
16. Найдите величину вписанного в окружность угла, если он отсекает от нее дугу, угловая величина которой равна 145° .

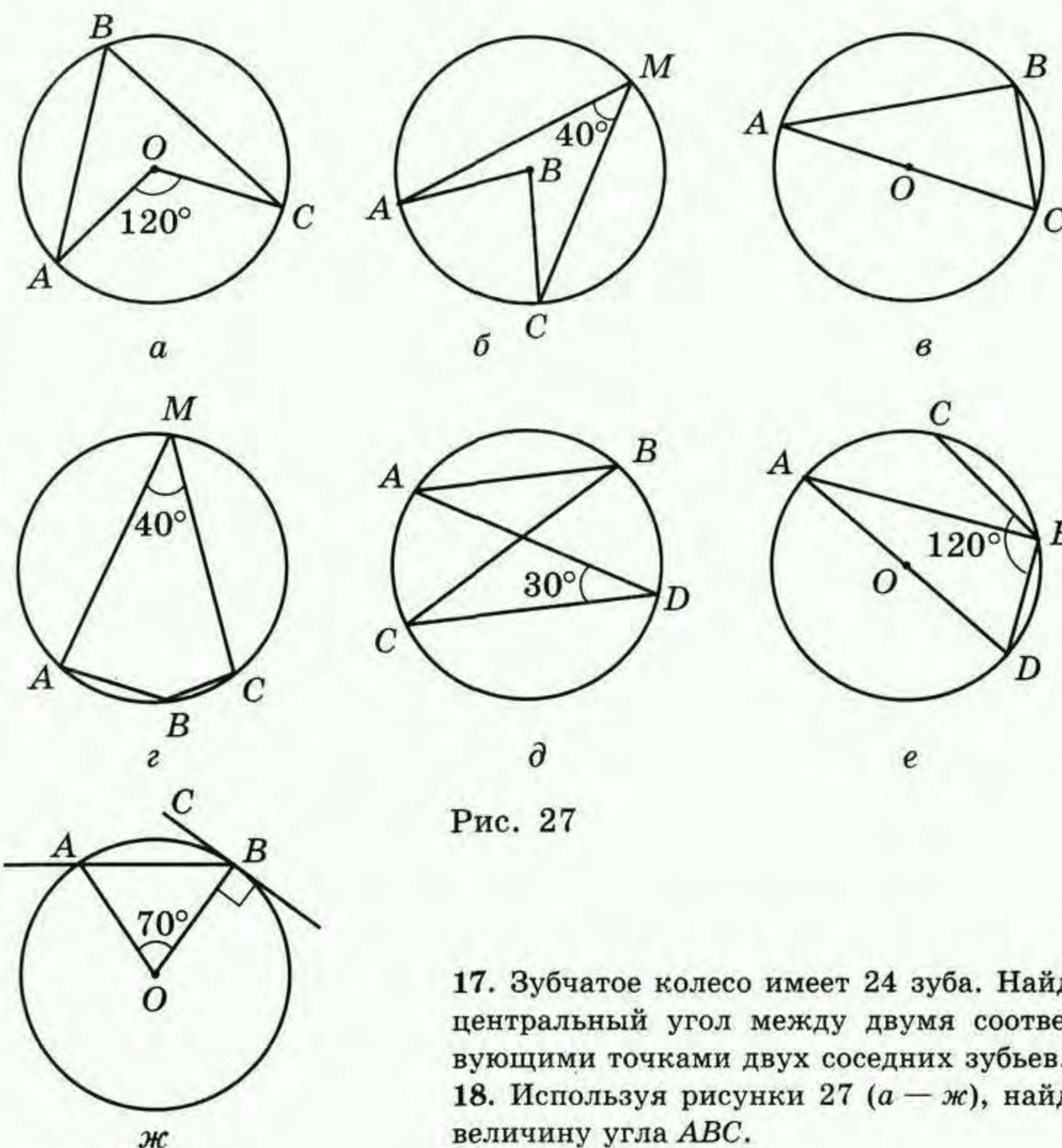


Рис. 27

17. Зубчатое колесо имеет 24 зуба. Найдите центральный угол между двумя соответствующими точками двух соседних зубьев.

18. Используя рисунки 27 (а — ж), найдите величину угла ABC .



85. Сколько градусов в дуге, хорда которой равна радиусу?

86. Из точки, данной на окружности, проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.

87. Точки A и B делят окружность на две дуги, одна из которых в пять раз больше другой. Найдите их градусные величины.

88. Точки A, B, C делят окружность с центром в точке O на три дуги, градусные величины которых относятся как $7:5:6$. Найдите углы: а) AOB, BOC, AOC ; б) ABC, BAC, ACB .

89. Сцеплены два зубчатых колеса в 36 и 45 зубьев. Вычислите, на какой угол повернется первое зубчатое колесо,

если второе повернется на: а) 40° ; б) 56° ; в) 80° ; г) 120° ; д) 360° .

90. Центральный угол AOB на 40° больше вписанного, опирающегося на ту же дугу AB . Найдите эти углы.

91. На окружности с центром в точке O отмечены точки A, B, C, M . Угол AOB в два раза больше угла BOC , угол AMB равен 30° . Найдите величины углов BMC и AMC .

92. Около грани ABC тетраэдра $SABC$ описана окружность. Точки A, B, C разбивают ее на дуги, две из которых равны 120° и 168° . Найдите углы треугольника ABC .

93. Около грани ABC тетраэдра $SABC$ описана окружность. Точки A, B, C разбивают ее на части, пропорциональные числам 2, 3, 5. Найдите углы треугольника ABC .

94. Один центральный угол вдвое больше другого в том же круге. Будет ли и хорда, соответствующая дуге большего угла, вдвое больше хорды, соответствующей дуге меньшего угла?

95. Из общей точки двух пересекающихся окружностей выходят два луча, встречающие первую окружность в точках A и B , вторую — в точках C и D . Что вы можете сказать о градусной мере дуг AB и CD ?

96. Вершины треугольника ABC , вписанного в окружность с центром O , делят ее на три дуги. Градусные величины этих дуг относятся как 2 : 9 : 7. Найдите: а) углы AOB, AOC, BOC ; б) углы треугольника.

97. Точки A, B, C лежат на окружности с центром в точке O . Угол ABC равен 50° , величины дуг AB и CB относятся как 5 : 8. Найдите эти дуги и угол AOC .

98. Хорда AB стягивает дугу, равную 120° , а хорда AC — дугу в 46° . Найдите угол BAC . Сколько решений имеет задача?

99. Точки A, B, C делят окружность на части, пропорциональные числам 3, 2, 4. Через точку B проведена касательная к окружности. Найдите острые углы, которые эта касательная образует с хордами BA и BC .



100. Из точки A к окружности с центром в точке O проведена касательная AB (B — точка касания) и секущая AM , проходящая через точку O (точка O лежит между точками A и M). Найдите угол BAM , если дуга BM равна 110° .

101. Из вершины угла треугольника проведены биссектриса и диаметр описанной окружности. Выразите угол между ними через углы треугольника.

102. Из вершины угла треугольника проведены высота и диаметр описанной окружности. Выразите угол между ними через углы треугольника.

103. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40° . Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три дуги. Найдите величины этих дуг.

104. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной около треугольника окружности. AN — высота треугольника. Докажите, что углы BAN и OAC равны.

105. Хорды AB и CK окружности пересекаются в точке M . Найдите угол AMK , если градусные величины дуг AK и BC равны соответственно 70° и 10° .

106. Из точки M , лежащей вне окружности, проведены прямые a и b . Они пересекают окружность в точках A, B и C, K соответственно так, что дуга AC равна 40° , а дуга BK — 100° . Найдите угол между прямыми a и b .

107. На данной прямой KP найдите точку, из которой данный отрезок AB был бы виден под данным углом α .

108. Даны два непересекающихся и непараллельных отрезка AB и KP . Найдите точку, из которой отрезок AB виден под данным углом α , а отрезок KP под данным углом β .

109. Постройте треугольник по основанию a , углу при вершине α и высоте h .

110. Постройте параллелограмм по двум его диагоналям d_1, d_2 и тупому углу α параллелограмма.

§ 7. Хорды и их свойства

7.1. Напомним, что *хордой* называют отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорду, проходящую через центр окружности, называют *диаметром* окружности. Познакомимся с основными свойствами хорд.

1. *Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду, делит ее пополам* (длину такого перпендикуляра называют расстоянием от центра окружности до хорды).

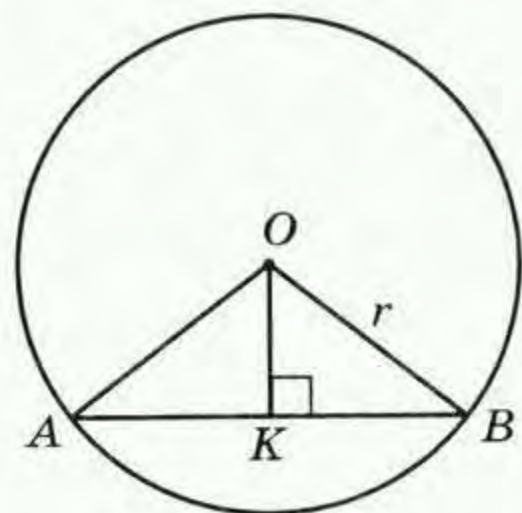


Рис. 28

Дано: $\omega(O; r)$; хорда AB ; $OK \perp AB$ (рис. 28).

Доказать: $AK = KB$.

Доказательство. Проведем отрезки OA и OB . Прямоугольные треугольники AOK и BOK равны по катету (OK — общий) и гипотенузе ($OA = OB = r$).

Следовательно, равны и их катеты AK и KB . ■

2. Если две хорды равноудалены от центра окружности, то они равны.

Дано: $\omega(O; R)$; хорды AB и CD ; $OK \perp AB$ и $OL \perp CD$; $OK = OL$ (рис. 29).

Доказать: $AB = CD$.

Доказательство.

1) Прямоугольные треугольники KOB и LOD равны по катету ($OK = OL$ по условию) и гипотенузе ($OB = OD = R$). Следовательно, равны и два других катета: $KB = LD$.

2) По первому свойству хорд $AB = 2 \cdot KB$ и $CD = 2 \cdot LD$. В силу того, что $KB = LD$, $AB = CD$. ■

3*. Центральные углы, опирающиеся на равные хорды, равны.

Дано: $\omega(O; r)$, $AB = CD$ (рис. 30).

Доказать: $\angle AOB = \angle COD$.

Доказательство. $\triangle AOB = \triangle COD$ по трем сторонам ($AB = CD$ по условию, $OA = OB = OC = OD = r$). Следовательно, равны и соответствующие углы: $\angle AOB = \angle COD$. ■

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на равные хорды, равны или дополняют друг друга до 180° .

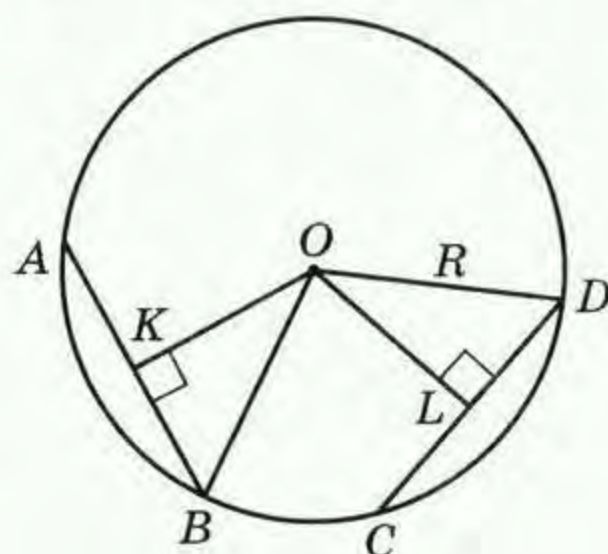


Рис. 29

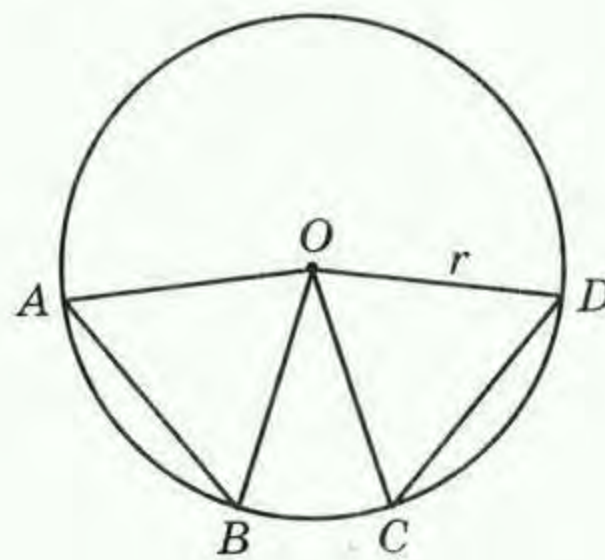


Рис. 30

4*. Соответственные дуги, стягиваемые равными хордами, равны.

Дано: $\omega(O; r)$; $AB = CD$ (см. рис. 30).

Доказать: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Доказательство. 1) По третьему свойству $\angle AOB = \angle COD$.

2) При повороте относительно центра окружность переходит в себя. Повернем луч OA на угол AOC . Углы AOB и COD совпадут, следовательно, совпадут и дуги AB и CD , а значит, они равны. ■

7.2. Задача. Хорда удалена от центра окружности на расстояние 4 см и отсекает от окружности дугу в 120° . Найдите длину этой хорды.

Дано: $\omega(O, r)$, $\angle AOB = 120^\circ$,

$OK \perp AB$, $OK = 4$ см (см. рис. 28).

Найти AB .

Решение (I способ).

1) $\angle AOB = 120^\circ$ (как центральный, опирающийся на дугу AB).

2) Треугольник AOB — равнобедренный ($OA = OB = r$), OK — высота, биссектриса и медиана. Значит, $\angle KOB = 60^\circ$, $AK = KB$.

3) В треугольнике KBO $\angle K = 90^\circ$, $\angle O = 60^\circ$, $OK = 4$ см, $KB = OK \cdot \operatorname{tg} O = 4 \sqrt{3}$ (см).

4) $AB = 2KB = 2 \cdot 4 \sqrt{3} = 8 \sqrt{3}$ (см).

Ответ: $8 \sqrt{3}$ см.

Решение (II способ).

1) $\angle AOB = 120^\circ$ (как центральный, опирающийся на дугу AB).

2) Треугольник AOB — равнобедренный ($OA = OB = r$), OK — высота, биссектриса и медиана. Значит, $\angle KOB = 60^\circ$, $AK = KB$.

3) В треугольнике KBO $\angle K = 90^\circ$, $\angle O = 60^\circ$, $OK = 4$ см, тогда $\angle B = 30^\circ$ и $OB = 2OK = 8$ (см); по теореме Пифагора $KB = \sqrt{OB^2 - OK^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4 \sqrt{3}$ (см).

4) $AB = 2KB = 2 \cdot 4 \sqrt{3} = 8 \sqrt{3}$ (см).

Ответ: $8 \sqrt{3}$ см.



1. Докажите, что перпендикуляр, опущенный на хорду из центра окружности, делит эту хорду пополам.
2. Диаметр окружности перпендикулярен хорде и отсекает на ней отрезок, равный 6 см. Найдите длину хорды.
3. Что вы можете сказать о хордах, равноудаленных от центра окружности?
4. Хорда длиной 8 см отстоит от центра окружности на 2 см. Найдите длину второй хорды, отстоящей от центра окружности на 2 см.
- 5*. Что вы можете сказать о центральных углах, опирающихся на равные хорды?
- 6*. В окружности проведены равные хорды AB и BC . Найдите величину угла AOC , если центральный угол $AOB = 73^\circ$.
- 7*. Всегда ли будут равны вписанные углы, опирающиеся на равные хорды? Ответ поясните чертежом.
- 8*. Что вы можете сказать о дугах, стягиваемых равными хордами?
9. Дана окружность, радиус которой равен 5 см. Какую длину имеет наибольшая из хорд этой окружности?
10. В окружности проведены две равные хорды, одна из которых отстоит от центра на 3 см. На каком расстоянии от центра отстоит другая хорда?
11. В окружности на равном расстоянии от центра проведены хорды AB и CD . Чему равна хорда AB , если CD равна 10 см?
12. Могут ли две хорды окружности точкой пересечения взаимно делиться пополам? Если могут, то при каком условии?
13. На рисунке 31 $AM \parallel BC$. Докажите, что $AM = BC$.
14. На рисунке 32 $AB = BC$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

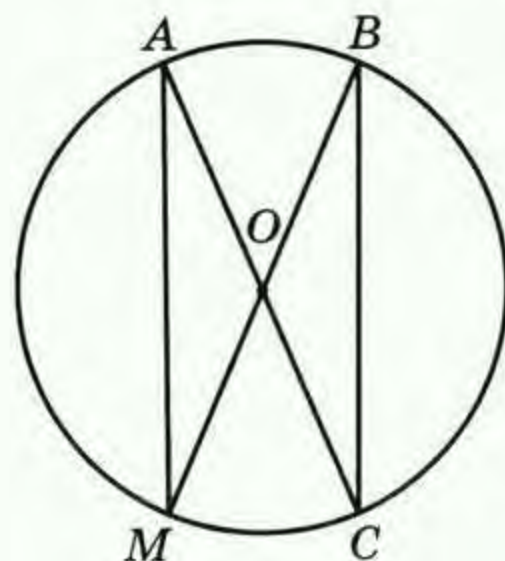


Рис. 31

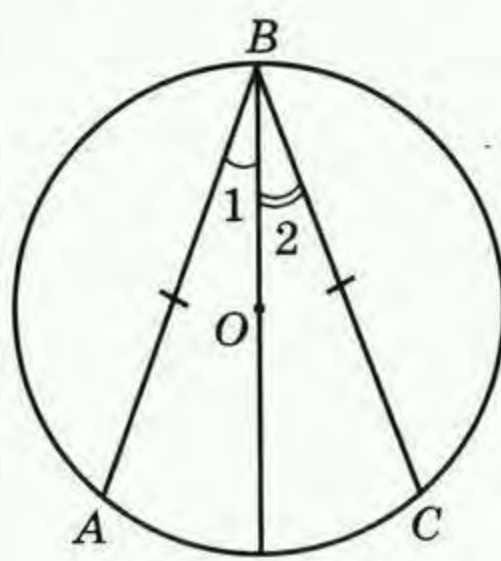


Рис. 32

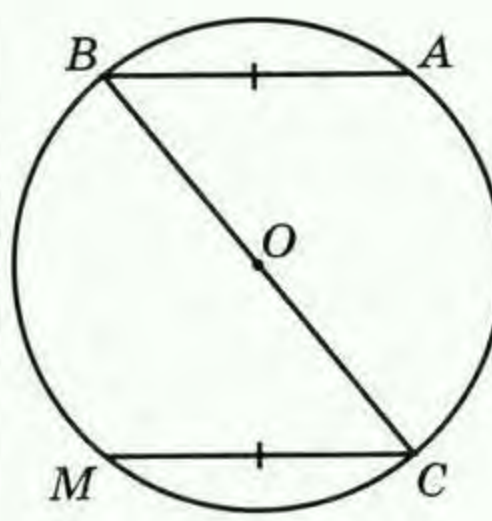


Рис. 33



111. На рисунке 33 $AB = CM$. Докажите, что $AB \parallel CM$.
112. Хорда, равная 8 см, отсекает от окружности дугу в 90° . Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

113. В окружности проведены две параллельные хорды, отсекающие от нее дуги в 90° . Найдите расстояние между хордами, если длина одной из них равна 12 см.

114. Хорда AB перпендикулярна радиусу OM окружности с центром в точке O и делит его пополам. Найдите углы AOB и OAM .

115. Докажите, что хорда окружности, перпендикулярная другой хорде этой окружности и проходящая через ее середину, является диаметром окружности.

116. Проведите окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.

117. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B так, чтобы угол между радиусом окружности, проведенным в точку A , и хордой AB был равен 30° .

118. В прямой угол вписана окружность. Хорда, соединяющая точки касания, равна 2 дм. Найдите расстояние от этой хорды до центра окружности.

119. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и на 10 см. Определите их длину.

120. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка в 2 см и 6 см. Найдите расстояние от хорды до центра.

121. Радиус окружности равен m , а ее хорда n . Найдите расстояние d от хорды до центра окружности.



122. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60° . Найдите хорду AB и ее расстояние d от центра O , если радиус окружности равен R .

123. Прямая пересекает две концентрические окружности. Докажите, что отрезки этой прямой, заключенные в круговом кольце, видны из центра под равными углами.

124. В данной окружности проведены две равные параллельные между собой хорды, расстояние между прямыми, на которых они лежат, равно радиусу данной окружности. Найдите острый угол между отрезками, соединяющими концы хорд.

125. Что является геометрическим местом середин хорд, проведенных параллельно данной прямой?

126. Что является геометрическим местом середин равных хорд данной окружности?

127. Докажите, что если через концы хорды данной окружности провести перпендикулярные к ней хорды, то последние будут равны.

128. На хорде AB взяты точки K и E на равном расстоянии от середины S этой хорды. Из этих точек восстановлены к AB перпендикуляры KP и EM до пересечения с окружностью. Докажите, что эти перпендикуляры равны.

129. Параллельно прямой O_1O_2 , соединяющей центры двух равных окружностей, проведена секущая CM , которая пересекает первую окружность в точках A_1 и B_1 , а вторую — в точках A_2 и B_2 . Докажите, что $A_1A_2 = B_1B_2 = O_1O_2$.

130. Докажите, что отрезки двух равных и пересекающихся хорд окружности соответственно равны.

131. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC . Докажите, что хорда KM , соединяющая середины дуг, стягиваемых двумя сторонами треугольника, делится этими сторонами на три равные части.

§ 8. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

8.1. Теорема (о пересекающихся хордах). Если хорды AB и CD окружности пересекаются в некоторой точке S , то $AS \cdot SB = CS \cdot DS$.

Дано: $\omega(O, r)$; AB, CD — хорды; $AB \cap CD = S$ (рис. 34).

Доказать: $AS \cdot SB = CS \cdot DS$.

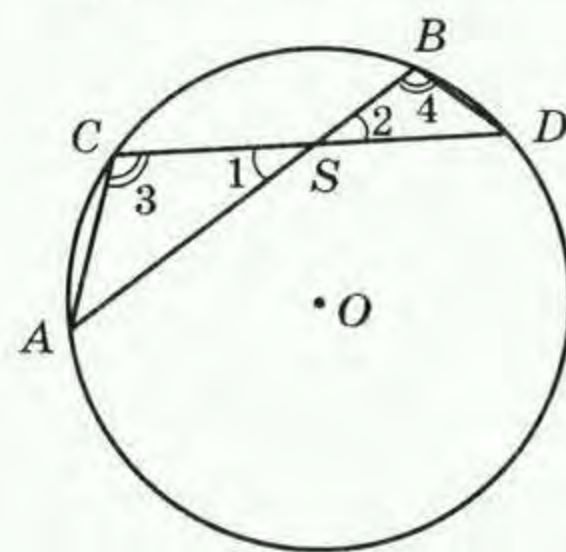


Рис. 34

Доказательство. 1) $\triangle ACS \sim \triangle DBS$ ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ по теореме о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу).

2) $\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{SB}$ (у подобных треугольников соответственные стороны пропорциональны). Следовательно, $AS \cdot SB = CS \cdot DS$. ■

8.2. Теорема (о секущих к окружности, проведенных из одной точки). Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность соответственно в точках A, B и C, D , то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Дано: $\omega(O, r)$; PAB и PCD — секущие (рис. 35).

Доказать: $AP \cdot BP = PC \cdot PD$.

Доказательство. Проведем отрезки BC и AD .

1) $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ ($\angle P$ — общий, $\angle B = \angle D$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу AC).

2) $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{PB}$ (у подобных треугольников соответственные стороны пропорциональны).

3) Следовательно, $AP \cdot BP = PD \cdot PC$. ■

Следствие. Если из точки P к окружности проведены касательная PA и секущая PBC , то $PA^2 = PB \cdot PC$ (рис. 36).

Докажите его самостоятельно, используя подобие треугольников APB и CPA .

8.3. Задача. Хорды AB и CD пересекаются в точке M . Найдите длину хорды CD , если $AM = 4$ см, $MB = 6$ см, $CM : MD = 3 : 4$.

Дано: $AB \cap CD = M$, $AM = 4$ см, $MB = 6$ см, $CM : MD = 3 : 4$ (рис. 37).

Найти CD .

Решение.

1) $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (свойство пересекающихся хорд).

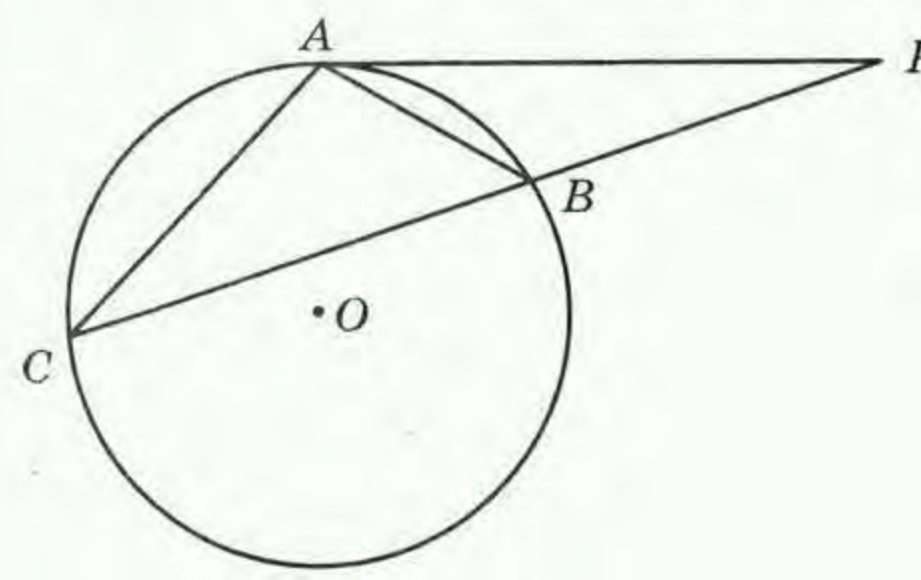


Рис. 36

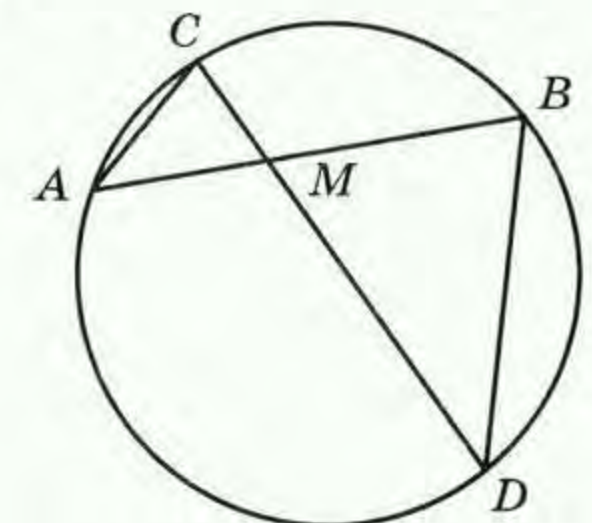


Рис. 37

2) Пусть $CM = 3x$ см, $MD = 4x$ см, где x — количество сантиметров в одной части, тогда $4 \cdot 12 = 3x \cdot 4x$, $x > 0$, $12x^2 = 48$, $x = 2$ см.

3) Тогда $CM = 6$ см, $MD = 8$ см, $CD = CM + MD = 6 + 8 = 14$ (см).

Ответ: 14 см.



1. Через точку M , взятую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD . Докажите, что треугольники AMC и DMB подобны. Запишите пропорциональность их соответствующих сторон (см. рис. 37).
2. Сформулируйте и докажите теорему о пересекающихся хордах.
3. Хорды AB и CD пересекаются в точке O . Найдите длину отрезка OD , если известно, что $AO = 3$ см, $OB = 4$ см, $CO = 6$ см.
4. Сформулируйте и докажите теорему о секущих к окружности, проведенных из одной точки.

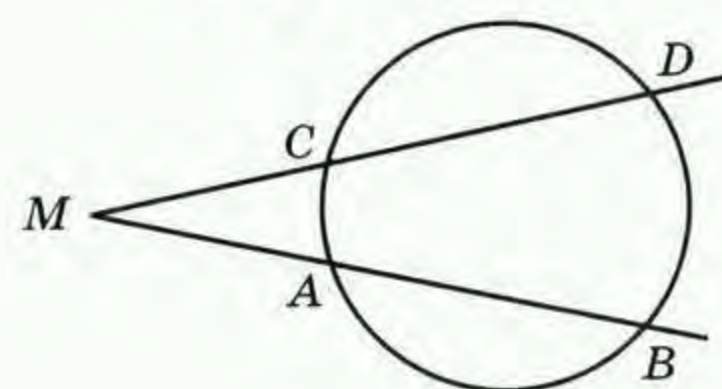


Рис. 38

5. Из точки M проведены к окружности две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках A и B , а вторая — в точках C и D (рис. 38). Найдите длину отрезка MD , если известно, что $AM = 6$ см, $BM = 8$ см, $CM = 10$ см.
6. Сформулируйте и докажите утверждение о касательной к окружности и секущей, проведенных из одной точки.



132. Хорды AB и CD пересекаются в точке O . Найдите длину хорды CD , если известно, что: а) $AO = 30$ см, $OB = 12$ см, $CO = 18$ см; б) $AO = 10$ см, $OB = 8$ см, $CO = 16$ см.

133. Чему равен радиус окружности, если из точки окружности на диаметр опущен перпендикуляр длиной в 8 см, а один из отрезков диаметра равен 4 см?

134. Диаметр MK окружности перпендикулярен к хорде AB и пересекает ее в точке C . Найдите AB , если $MC = 4$ см, $CK = 8$ см.

135. Из точки A окружности проведен к диаметру MK перпендикуляр AB . Докажите, что $AB = \sqrt{MB \cdot BK}$.

136. Заметим, что отрезок $AB = \sqrt{MB \cdot BK}$ из предыдущей задачи называют средним пропорциональным между отрезками MB и BK . Постройте отрезок, средний пропорциональный между данными отрезками a и b .

137. Из точки M проведены к окружности две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках A и B ,

а вторая — в точках C и D . Найдите длину отрезка CD , если известно, что $AM = 12$ см, $BM = 18$ см, $CM = 15$ см.

138. Хорды AB и CO пересекаются внутри окружности в точке M . Отношение площадей треугольников ACM и BMO равно $4 : 9$. Найдите отношение отрезков CM и MB .

139. Секущая ABC повернута около внешней точки A так, что внешний ее отрезок AB уменьшился в три раза. Как изменилась длина секущей?

140. Пусть AB и AC — две прямые, пересекающие окружность $\omega(O, r)$: первая — в точках D и B , вторая — в точках E и C . Найдите:

а) AE , если $AD = 5$ см, $DB = 15$ см и $AC = 25$ см;

б) BD , если $AB = 24$ м, $AC = 16$ м и $EC = 10$ м;

в) AB и AC , если $AB + AC = 50$ см, $\frac{AD}{AE} = \frac{3}{7}$.

141. В основание ABC тетраэдра $MABC$ вписана окружность. Из точки A проведена секущая AKP и касательная AE . Найдите длину касательной, если внутренний и внешний отрезки секущей соответственно равны: а) 4 см и 5 см; б) 1 см и 2 см.

142. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Найдите длину этой секущей.

143. Из точки, взятой вне окружности, проведены к ней касательная и секущая, которая делится окружностью пополам. Найдите длину касательной, если внутренняя часть секущей равна 4 см.

144. Найдите внешнюю часть секущей, если ее длина равна 16 см, а касательная, проведенная из той же точки, что и секущая к этой окружности, равна 8 см.

145. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Найдите длину касательной, если внешний и внутренний отрезки секущей соответственно выражаются следующими числами: 1) 4 и 5; 2) 2,25 и 1,75; 3) 1 и 2.

146. Касательная равна 20 см, а наибольшая секущая, проведенная из той же точки, равна 50 см. Найдите радиус окружности.

147. Секущая больше своего внешнего отрезка в $2\frac{1}{4}$ раза. Во сколько раз она больше касательной, проведенной из той же точки?

148. Из общей точки проведены к окружности касательная и секущая. Найдите длину касательной, если она на 5 см больше внешнего отрезка и на столько же меньше внутреннего отрезка секущей.

149. Из общей точки проведены к одной окружности касательная и секущая. Касательная больше внутреннего и внешнего отрезков секущей соответственно на 2 см и 4 см. Найдите длину секущей.



150. Две хорды продолжены до взаимного пересечения. Найдите длину полученных продолжений, если хорды равны a и b , а их продолжения относятся как $\frac{m}{n}$.

151. В окружность вписан равнобедренный треугольник, основание которого равно 10 см, а боковая сторона равна 12 см. Через середину высоты треугольника проведена хорда, параллельная его основанию. Найдите длину хорды.

152. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21 см. Параллельно этой стороне, через точку пересечения медиан, проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 8 см и 11 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

153. В окружность вписан треугольник ABC , и в нем проведены медианы AF и BK . Медиана AF продолжена до пересечения с окружностью в некоторой точке D . Найдите стороны AC и BC , если $BK = 63$ см, $AF = 45$ см и $DF = 24$, 2 см.

154. В окружность диаметра 10 см вписан равнобедренный треугольник с высотой, равной 2 см. Найдите основание треугольника.

155. Вычислите диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника, основание которого равно 12 см, а высота — 3 см.

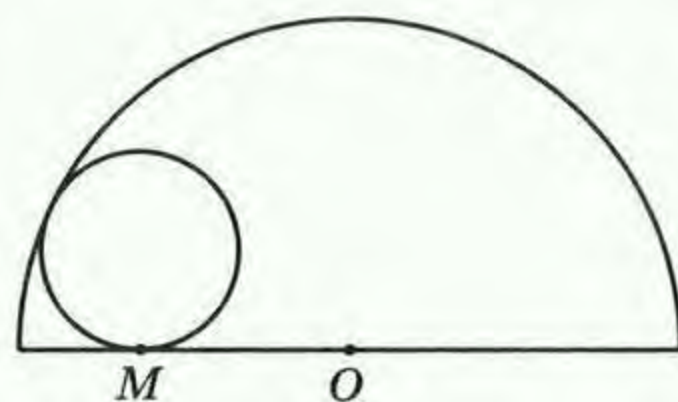


Рис. 39

156. В полуокружность с центром O и радиусом, равным 16 см, вписана окружность, диаметр которой равен 12 см (рис. 39). Найдите расстояние от точки O до точки касания M диаметра данной полуокружности с меньшей окружностью.

157. Из внешней точки A проведены к окружности секущие ABC и ADE . Известно отношение их внешних частей: $\frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}$. Найдите отношение площадей треугольников ABE и ADC .

158. Из внешней точки A проведены к окружности касательная AB и секущая ACD . Отношение площадей треугольников ABC и ABD равно $4 : 25$. Найдите отношение отрезков AB и AC .

§ 9*. Четырехугольник, вписанный в окружность и описанный около нее

9.1. **Определение.** Четырехугольник, все вершины которого лежат на окружности, называют вписанным в нее.

Теорема (о четырехугольнике, вписанном в окружность). Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы его противоположных углов равны 180° .

Дано: четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega(O; r)$ (рис. 40).

Доказать: $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Доказательство.

1) По теореме о величине угла, вписанного в окружность, $\angle A = \frac{1}{2} \overset{\frown}{DCB}$, $\angle C = \frac{1}{2} \overset{\frown}{DAB}$. Сложив эти два равенства, получим $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{DCB} + \overset{\frown}{DAB})$.

2) Так как $(\overset{\frown}{DCB} + \overset{\frown}{DAB}) = 360^\circ$, получим $\angle A + \angle C = 180^\circ$.

3) Аналогично доказывается, что $\angle B + \angle D = 180^\circ$. ■

9.2. **Определение.** Четырехугольник, стороны которого касаются окружности, называют описанным около окружности.

Теорема (о четырехугольнике, описанном около окружности). Если четырехугольник описан около окружности, то суммы его противоположных сторон равны.

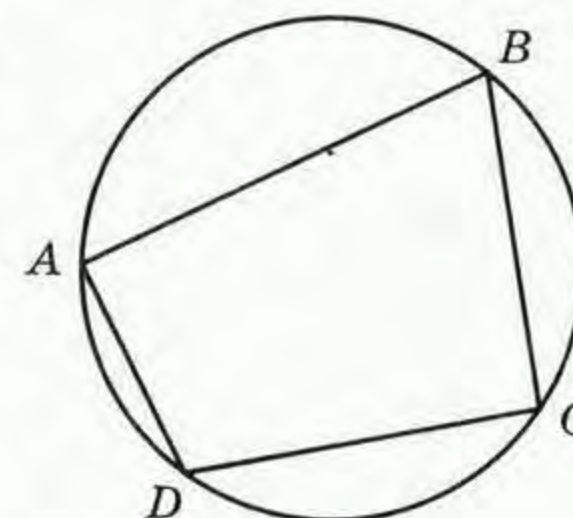


Рис. 40

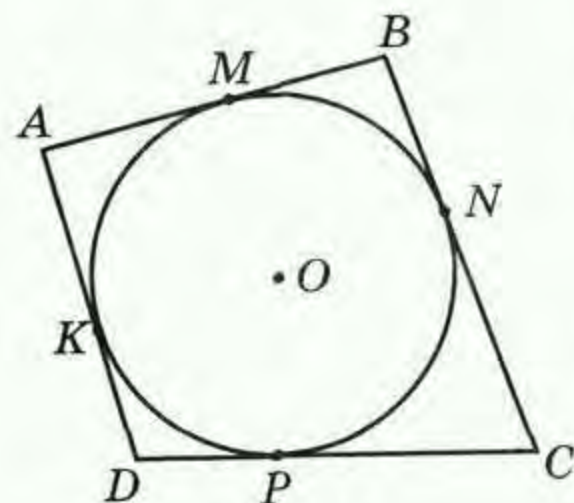


Рис. 41

Дано: четырехугольник $ABCD$ описан около окружности $\omega(O; r)$ (рис. 41).

Доказать: $AB + CD = DA + BC$.

Доказательство. 1) Поскольку касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, то $AM = AK$, $MB = BN$, $PC = NC$, $DP = KD$.

2) Сложив правые и левые части этих равенств и сгруппировав их, получим:

$$(AM + MB) + (PC + PD) = (AK + KD) + (BN + NC).$$

Отсюда получаем: $AB + CD = AD + BC$. ■

9.3. Задача. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Найдите стороны BC и CD , если $AD = 6$ см, $AB = 4$ см, $BC : CD = 3 : 5$.

Дано: четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, $AD = 6$ см, $AB = 4$ см, $BC : CD = 3 : 5$ (см. рис. 41).

Найти: BC , CD .

Решение.

1) $AD + BC = AB + DC$ (по свойству сторон четырехугольника, описанного около окружности).

2) Пусть $BC = 3x$ см, $CD = 5x$ см, где x — количество сантиметров в одной части, тогда $6 + 3x = 4 + 5x$, $x > 0$;

$2x = 2$, $x = 1$ см, тогда $BC = 3$ см, $CD = 5$ см.

Ответ: 3 см, 5 см.



1. Сформулируйте и докажите теорему о четырехугольнике, вписанном в окружность.

2. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность $\omega(O, R)$, $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 78^\circ$. Найдите остальные углы четырехугольника.

3. Можно ли неравобедренную трапецию вписать в окружность?

4. Можно ли вписать в окружность: а) ромб, один из углов которого острый; б) квадрат; в) параллелограмм, один из углов которого тупой; г) прямоугольник?

5. Сформулируйте и докажите теорему о четырехугольнике, описанном около окружности.

6. Можно ли неравобедренную трапецию описать около окружности?

7. Можно ли описать около окружности: а) ромб; б) квадрат; в) параллелограмм, смежные стороны которого имеют разную величину; г) прямоугольник, смежные стороны которого имеют разную величину?

8. У четырехугольника, вписанного в окружность, три угла равны. Можно ли вычислить углы этого четырехугольника?

9. Стороны AB , BC и CD четырехугольника $ABCD$, описанного около окружности, равны соответственно 12 см, 18 см и 2 дм. Найдите его сторону AD .

10. У четырехугольника, описанного около окружности, три стороны равны. Что вы можете сказать о его четвертой стороне?

11. В описанном четырехугольнике сумма противоположных сторон равна 50 см, а третья сторона равна 20 см. Найдите четвертую сторону четырехугольника.

12. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого, взятые последовательно, относятся как: а) $2 : 4 : 5 : 3$; б) $5 : 7 : 8 : 9$?



159. Три угла вписанного четырехугольника (в последовательном порядке) относятся как: а) $1 : 2 : 3$; б) $2 : 3 : 4$. Найдите углы четырехугольника.

160. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм будет прямоугольником.

161. Докажите, что внутренний угол A вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ равен его внешнему углу с вершиной C .

162. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AD является диаметром окружности, $\angle ABC = 121^\circ$, $\angle BCD = 129^\circ$. Найдите углы BAD , CDA , ACB .

163. MP — диаметр окружности, описанной около четырехугольника $MKTP$. Найдите углы KTP , TPM , KMP , если $\angle KTM = 24^\circ$, $\angle MKT = 127^\circ$.

164. Равнобедренная трапеция вписана в окружность так, что центр окружности лежит на одном из оснований. Найдите углы трапеции, если один из углов между ее диагоналями равен 48° .

165. Средняя линия описанной около окружности трапеции равна 25 см. Найдите периметр трапеции.

166. Три стороны описанного четырехугольника относятся (в последовательном порядке) как $1 : 2 : 3$. Найдите стороны, если известно, что периметр его равен 24 м.

167. Около окружности описана равнобедренная трапеция с углом 30° . Средняя линия ее равна 1 м. Найдите радиус окружности.

168. Найдите площадь четырехугольника, описанного около окружности, радиус которой равен r , а три его стороны, взятые по порядку, равны a, b, c .

169. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению ее оснований.

170. В одну из граней прямоугольного параллелепипеда вписана окружность. Докажите, что она является квадратом.

171. Какими будут ребра прямоугольного параллелепипеда, если известно, что в каждую грань можно вписать окружность?



172. Докажите, что если в четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° , то около него можно описать окружность.

173. На сторонах угла AOB выбраны точки A и B . Через них провели прямые, перпендикулярные сторонам угла и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырехугольника $ACBO$ можно описать окружность.

174. Докажите, что около выпуклого четырехугольника $ABCD$, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

175. Каждая из боковых сторон и меньшее основание трапеции равны по 5 см, а один из углов равен 60° . Найдите радиус окружности, описанной около нее.

176. Докажите, что в равнобедренной трапеции, описанной около окружности, квадрат высоты равен произведению ее оснований.

177. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности, если точка касания делит боковую сторону трапеции на отрезки a, b .



Задачи к главе II

178. Найдите угол поворота зубчатого колеса, имеющего:
а) 30 зубьев; б) 45 зубьев; в) 90 зубьев, если каждый последующий зуб занял положение предыдущего (в градусах).

179. Угол, вписанный в окружность, равен $23^\circ 30'$. Найдите величину центрального угла, ему соответствующего.

180. Три точки A, B, C делят окружность с центром в точке O на три дуги, величины которых пропорциональны числам 2, 5, 11. Найдите углы: а) AOB, BOC, AOC ; б) ABC, BCA, CAB .

181. Хорды AB и CM пересекаются в точке K так, что угол ACK равен 60° , а угол KMB равен 20° . Найдите углы CAB, MBA, AKC, AKM .

182. Хорды AB и CM пересекаются в точке K так, что угол CKB равен 60° , угол CMB в два раза больше угла ACM . Найдите углы ACM, CMB .

183. Около остроугольного треугольника ABC , где угол A равен 50° , описана окружность. Через вершину B проведена касательная BE к окружности. Найдите угол CBE .

184. AB — диаметр, BC — хорда окружности с центром в точке O . Найдите угол ABC , если угол AOC равен 70° .

185. Найдите угол между хордой MK , стягивающей дугу в 66° , и диаметром KP .

186. AB — хорда окружности с центром в точке O , AC — касательная, угол BAC равен 35° . Найдите угол AOB .

187. В прямоугольнике диагональ образует со стороной угол в $12^\circ 35'$. На какие четыре части делится вершинами этого прямоугольника описанная около него окружность?

188. В окружности проведена хорда, равная радиусу. Под каким углом видна эта хорда: а) из центра окружности; б) из произвольной точки окружности?

189. Чему равно расстояние между двумя параллельными касательными к окружности, если ее радиус равен 5 см?

190. Хорда, равная 6 см, отсекает от окружности дугу в 120° . Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

191. Дана окружность. Через середину ее радиуса проведена перпендикулярная ему хорда. Докажите, что эта хорда видна из центра под углом 120° .

192. Расстояние от центра окружности до хорды в два раза меньше самой хорды. Под каким углом видна она из центра окружности?

193. Радиус окружности равен 8 дм, хорда AB равна 12 дм. Через точку A проведена касательная, а из точки B — хорда BC , параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и хордой BC .

194. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на радиус, равный 34 см, делит его в отношении 8 : 9 (начиная от центра). Найдите длину перпендикуляра.

195. Хорда BC перпендикулярна к радиусу OA и пересекает его в точке D . Найдите BC , если $OA = 25$ см и $AD = 10$ см.

196. Постройте отрезок, средний пропорциональный между отрезками 3 см и 5 см.

197. AB — диаметр; AC — хорда; AD — ее проекция на диаметр AB . Определите: а) AC , если $AB = 35$ см, $AC = 5 AD$; б) AC , если радиус равен r и $AC = DB$.

198. Две хорды пересекаются внутри круга. Отрезки одной хорды равны 24 см и 14 см; один из отрезков другой хорды равен 28 см. Найдите второй ее отрезок.

199. Диаметр, перпендикулярный к хорде, делится ею на части, равные 8 см и 18 см. Найдите длину хорды.

200. Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 48 см и 3 см, а другая — пополам. Найдите длину второй хорды.

201. Из двух пересекающихся хорд одна разделилась на части в 12 м и 18 м, а другая — в отношении 3 : 8. Найдите длину второй хорды.

202. Дана полуокружность с диаметром AB . Из точки C полуокружности на диаметр опущен перпендикуляр CD . Найдите: а) OB , если $AD = 25$ см, $CD = 10$ см; б) AB , если $\frac{AD}{DB} = \frac{4}{9}$, $CD = 30$ см; в) AD , если $CD = 3AD$, а радиус равен r ; г) AD , если $AB = 50$ см, $CD = 15$ см.

203. Ширина кольца, образованного двумя концентрическими окружностями, равна 8 дм. Хорда большей окружности является касательной к меньшей окружности и равна 4 м. Найдите радиусы этих окружностей.

204. Постройте отрезок, равный: а) $\sqrt{15}$ см; б) $\sqrt{10}$ см; в) $\sqrt{6}$ см; г) $\sqrt{3}$ см.

205. AB — диаметр, AC — хорда; AD — ее проекция на диаметр AB . Найдите: а) AD , если $AB = 18$ см и $AC = 12$ см; б) радиус, если $AC = 12$ м и $AD = 4$ м; в) DB , если $AC = 24$ см и $DB = \frac{7}{9} AD$.

206. К окружности ω (O , R) проведены касательная AB и секущая ACD . Найдите: а) CD , если $AB = 2$ см и $AD = 4$ см;

б) AD , если $\frac{AC}{CD} = \frac{4}{5}$ и $AB = 12$ см; в) AB , если $AB = CD$ и $AC = a$.

207. а) Как далеко видно с воздушного шара (рис. 42), поднявшегося на высоту 4 км над Землей (радиус Земли приблизительно равен 6370 км)?

б) Гора Эльбрус (на Кавказе) поднимается над уровнем моря на 5600 м. Как далеко можно видеть с вершины этой горы?

в) M — наблюдательный пункт высотой h метров над Землей (рис. 43); радиус Земли равен R , $MT = d$ есть наибольшее видимое расстояние. Докажите, что $d = \sqrt{2Rh + h^2}$.

Замечание. Так как h^2 вследствие своей малости относительно $2Rh$ на результат почти не влияет, то можно пользоваться приближенной формулой $d \approx \sqrt{2Rh}$.

208. Касательная и секущая, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 см и 40 см, секущая удалена от центра на 8 см. Найдите радиус окружности.

209. Найдите расстояние от центра окружности до той точки, из которой выходят касательная и секущая, если они соответственно равны 4 см и 8 см, а секущая удалена от центра на 12 см.

210. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Найдите длину каждой, если касательная на 20 см меньше внутреннего отрезка и на 8 см больше внешнего отрезка секущей.

211. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 30 см, а внутренний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Найдите длину секущей и касательной.

212. Из одной точки проведены к окружности секущая и касательная. Сумма их равна 15 см, а внешний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Найдите секущую и касательную.

213. Отрезок AB продолжен на расстояние BC . На AB и AC как на диаметрах построены окружности. К отрезку AC в точке B проведен перпендикуляр, пересекающий большую

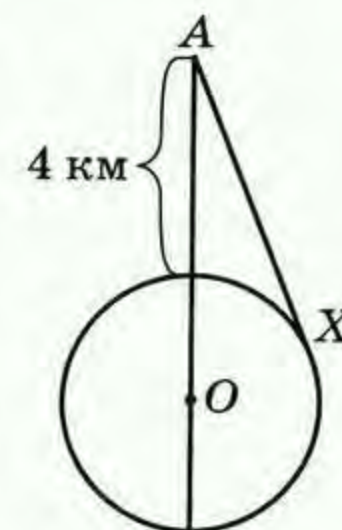


Рис. 42

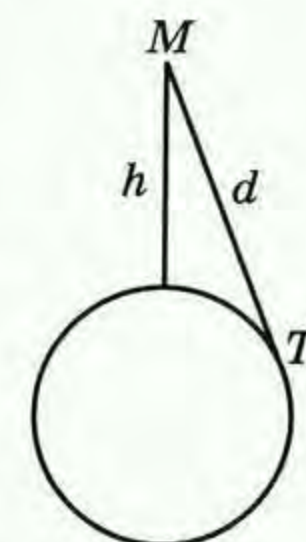


Рис. 43

окружность в некоторой точке D . Из точки C проведена касательная к меньшей окружности, касающаяся ее в точке K . Докажите, что $CD = CK$.

214. В окружность радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма высоты и основания равна диаметру окружности. Найдите высоту треугольника.

215. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника: а) если основание равно 16 см, а высота 4 см; б) если боковая сторона равна 12 дм, а высота 9 дм; в) если боковая сторона равна 15 м, а основание 18 м.

216. Две смежные стороны четырехугольника, описанного около окружности, равны 20 см и 32 см, а две другие относятся как 2 : 3. Найдите эти стороны.

217. Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 56 см. Найдите стороны четырехугольника, если две смежные его стороны относятся как 2 : 3, а две другие как 5 : 8.

218. Около окружности описан четырехугольник, периметр которого равен 68 см, а две смежные стороны равны 18 см и 24 см. Найдите две другие стороны четырехугольника.



219. В четырехугольнике, вписанном в окружность, проведены биссектрисы двух противоположных углов, пересекающих окружность в некоторых точках K и L . Докажите, что отрезок KL будет диаметром окружности.

220. Около окружности описана трапеция, боковые стороны которой равны 13 см и 15 см, а площадь равна 168 см^2 . Найдите основания трапеции.

221. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 18 \text{ см}$, $BC = 8 \text{ см}$, диагональ $AC = 20 \text{ см}$ и $\angle ACD = 90^\circ$. Найдите AD и CD .

222. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$, у которого $\angle B = 90^\circ$, диагональ $AC = CD = 15 \text{ см}$ и $AD = 18 \text{ см}$. Найдите площадь четырехугольника.

223. Около окружности описан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = AD$, $BC = CD$ и $\angle ADC = 90^\circ$. Найдите большую диагональ четырехугольника, если периметр его равен 9,8 дм, а площадь равна $5,88 \text{ дм}^2$.

224. Около окружности описан четырехугольник, две смежные стороны которого равны 21 см и 26 см, а диагональ, соединяющая их концы, равна 25 см. Найдите две другие стороны четырехугольника, угол между которыми равен 90° .

225. Около окружности описан треугольник ABC , у которого $AC = 30 \text{ см}$, $DC = 15 \text{ см}$, где D — точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC . Найдите сторону AB , если радиус окружности равен 8 см.

226. Около окружности, радиус которой равен 4 см, описан треугольник, одна из высот которого делится биссектрисой угла на отрезки, равные 4,5 см и 7,5 см. Найдите стороны треугольника.

227. Около окружности, радиус которой равен 4 дм, описан треугольник ABC . Сторона AB равна 13 дм, а высота BD — 12 дм. Найдите стороны AC и BC .

228. AC и BD — диагонали ромба $ABCD$. Окружность, описанная около треугольника ABD , пересекает большую диагональ AC в точке E . Найдите диагонали ромба, если $AB = 20 \text{ см}$, а $CE = 7 \text{ см}$.

229. AB — общая хорда двух пересекающихся окружностей, радиусы которых равны. Из точки A в одной из окружностей проведена хорда AC , являющаяся касательной ко второй окружности. Найдите AC , если $AB = 24 \text{ см}$, а радиусы окружностей равны 15 см.

230. В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого разделена на три равные части, и через точки деления проведены хорды, параллельные основанию. Найдите стороны треугольника, если хорды равны 11 см и 14 см.

231. Из внешней точки к окружности проведены: секущая, проходящая через ее центр, и касательная, равная половине секущей. Докажите, что отрезок касательной относится к радиусу как 4 : 3.

232. На одной из сторон треугольника, равной 12 дм, как на диаметре построена окружность, которая отсекает от двух других сторон отрезки, равные 1 дм и 1,25 дм (расположенные вне окружности). Найдите неизвестные стороны треугольника.

233. Четырехугольник $ABCE$ вписан в окружность. Его диагонали пересекаются в точке K . Окружность, проходящая

через точки A, B, K , пересекает BC и AE в точках M, P . Докажите, что $KM = KP$.

234. Докажите, что у всех трапеций, вписанных в данную окружность, с общей боковой стороной AB отношение высоты и средней линии постоянно.

235. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся и перпендикулярные хорды AB и CD . Докажите, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

236. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 70° . Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три дуги. Найдите величины этих дуг.

237. В остроугольном треугольнике ABC сумма углов A и B в полтора раза больше величины угла C . Длина меньшей стороны AC равна 3 см. Найдите длину высоты BH , если известно, что отрезок, соединяющий точку H с центром описанной окружности, виден из вершины B под углом 6° .

238. Через конец хорды, делящей окружность в отношении $5:4$, проведена касательная. Найдите острый угол между касательной и хордой.

239. В треугольник ABC вписана окружность. M, K, P — точки касания со сторонами AB, AC, BC соответственно. $\angle A = 38^\circ, \angle B = 86^\circ$. Найдите углы треугольника MKP .

340. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AB в точке E . Основания трапеции равны a и b . Найдите диагональ BD .

241. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны CD и AB, BC и AD продолжены до взаимного пересечения в точках N и F соответственно. Докажите, что биссектрисы углов BFA и AND перпендикулярны.

242. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке M . $\angle CMB = 73^\circ$, дуга BC содержит 110° . Найдите градусную величину дуги BD .

Глава III

Соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника

§ 10*. Метод координат

10.1. С понятиями «координатная плоскость», «координаты точки» вы уже знакомы. С их использованием появляется возможность изучать свойства геометрических фигур с помощью уравнений, используя алгебраические методы решения задач. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. Даны две точки координатной плоскости: $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Найдите координаты точки C , которая является серединой отрезка AB .

Решение.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не параллелен ни одной из координатных осей (рис. 44).

1) Построим прямые $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1 \parallel Oy$, тогда по теореме Фалеса $A_1C_1 = C_1B_1$.

2) Так как C_1 — середина отрезка A_1B_1 , то $x_2 - x = x - x_1$ или $2x = x_1 + x_2$,

$$x = (x_1 + x_2) : 2.$$

3) Докажите самостоятельно, что ординату точки C можно найти по формуле $y = (y_1 + y_2) : 2$.

Ответ:

$$C((x_1 + x_2) : 2, (y_1 + y_2) : 2).$$

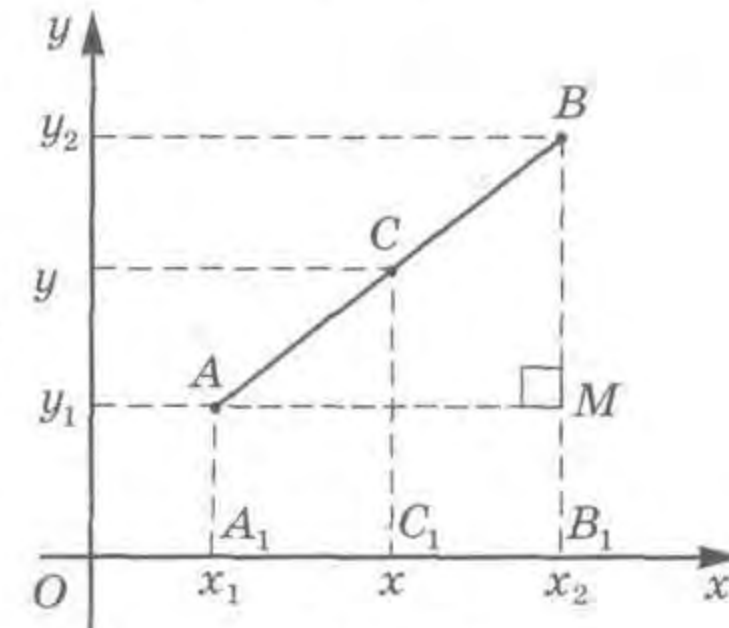


Рис. 44

через точки A, B, K , пересекает BC и AE в точках M, P . Докажите, что $KM = KP$.

234. Докажите, что у всех трапеций, вписанных в данную окружность, с общей боковой стороной AB отношение высоты и средней линии постоянно.

235. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся и перпендикулярные хорды AB и CD . Докажите, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

236. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 70° . Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три дуги. Найдите величины этих дуг.

237. В остроугольном треугольнике ABC сумма углов A и B в полтора раза больше величины угла C . Длина меньшей стороны AC равна 3 см. Найдите длину высоты BH , если известно, что отрезок, соединяющий точку H с центром описанной окружности, виден из вершины B под углом 6° .

238. Через конец хорды, делящей окружность в отношении $5:4$, проведена касательная. Найдите острый угол между касательной и хордой.

239. В треугольник ABC вписана окружность. M, K, P — точки касания со сторонами AB, AC, BC соответственно. $\angle A = 38^\circ, \angle B = 86^\circ$. Найдите углы треугольника MKP .

340. Окружность проходит через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ и касается боковой стороны AB в точке E . Основания трапеции равны a и b . Найдите диагональ BD .

241. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Его противоположные стороны CD и AB, BC и AD продолжены до взаимного пересечения в точках N и F соответственно. Докажите, что биссектрисы углов BFA и AND перпендикулярны.

242. Диаметр AB и хорда CD пересекаются в точке M . $\angle CMB = 73^\circ$, дуга BC содержит 110° . Найдите градусную величину дуги BD .

Глава III

Соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника

§ 10*. Метод координат

10.1. С понятиями «координатная плоскость», «координаты точки» вы уже знакомы. С их использованием появляется возможность изучать свойства геометрических фигур с помощью уравнений, используя алгебраические методы решения задач. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 1. Даны две точки координатной плоскости: $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Найдите координаты точки C , которая является серединой отрезка AB .

Решение.

Рассмотрим случай, когда отрезок AB не параллелен ни одной из координатных осей (рис. 44).

1) Построим прямые $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1 \parallel Oy$, тогда по теореме Фалеса $A_1C_1 = C_1B_1$.

2) Так как C_1 — середина отрезка A_1B_1 , то $x_2 - x = x - x_1$ или $2x = x_1 + x_2$,

$$x = (x_1 + x_2) : 2.$$

3) Докажите самостоятельно, что ординату точки C можно найти по формуле $y = (y_1 + y_2) : 2$.

Ответ:

$$C((x_1 + x_2) : 2, (y_1 + y_2) : 2).$$

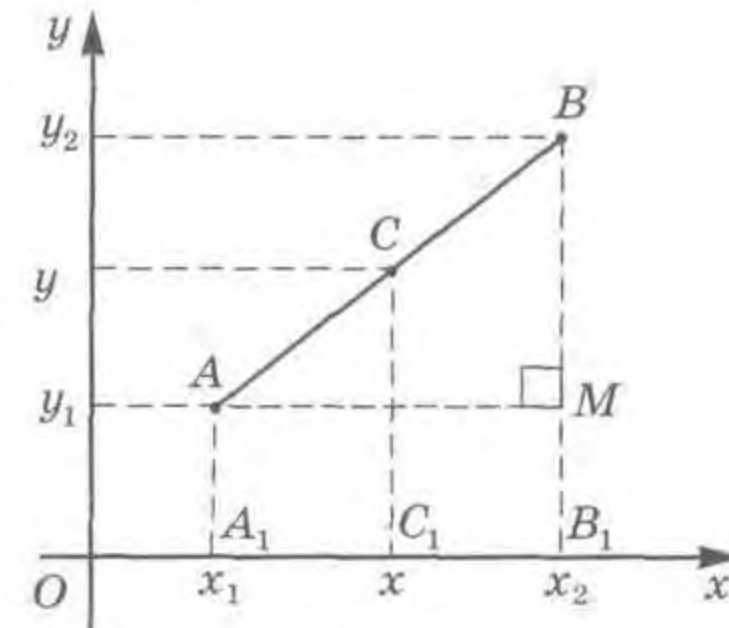


Рис. 44

Задача 2. Найдите длину отрезка AB , зная координаты точек: $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

Решение (см. рис. 44).

1) $BB_1 \perp Ox$, $AM \perp BB_1$, тогда треугольник ABM — прямоугольный.

2) По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2}$.

3) $AM = |x_2 - x_1|$, $BM = |y_2 - y_1|$.

4) Тогда $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Ответ: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Уравнение с двумя переменными x и y называют *уравнением линии*, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Задача 3. Составьте уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(x_0; y_0)$.

Решение (рис. 45, а).

1) Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит окружности, тогда $MC = r$ или $MC^2 = r^2$.

2) Тогда координаты точки M удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

3) Если точка $M(x; y)$ не лежит на данной окружности, то $MC \neq r$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению, полученному в пункте 2.

Ответ: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

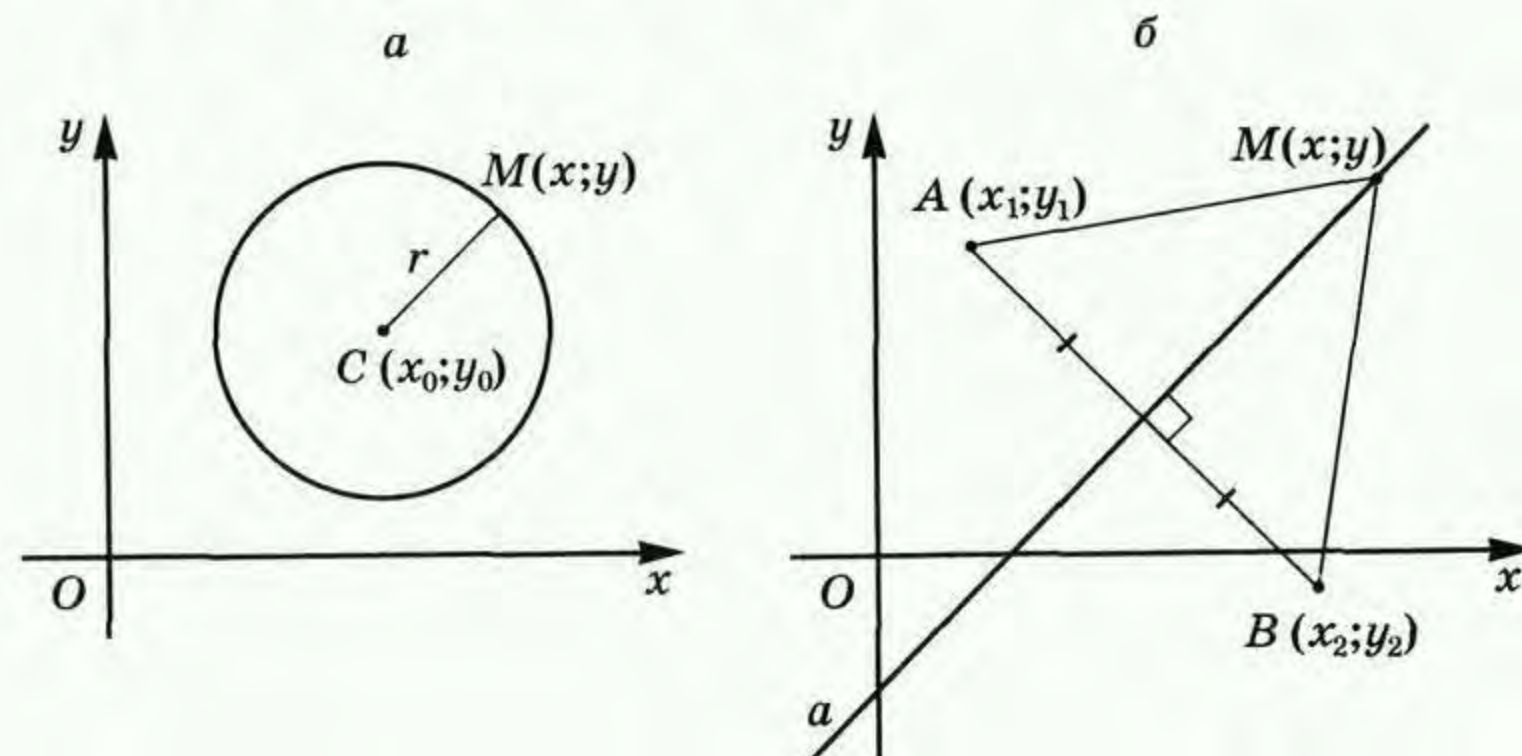


Рис. 45

Выведем уравнение прямой a в заданной прямоугольной системе координат (рис. 45, б):

1) Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ выбраны так, что прямая a содержит серединный перпендикуляр к отрезку AB .

2) Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой a , то $AM = BM$, или $AM^2 = BM^2$.

3) Тогда координаты точки M удовлетворяют уравнению $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$. Если точка $M(x; y)$ не лежит на прямой a , то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению, полученному в пункте 3.

4) После упрощения выражения $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$ уравнение примет вид $ax + by + c = 0$, где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2$.

10.2. Определим значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для любого угла от 0° до 180° , рассмотрев систему координат и *единичную полуокружность* с центром в начале координат, лежащую выше оси Ox (рис. 46, а).

Одной из сторон угла будем считать луч OX , а второй стороной угла — луч, выходящий из начала координат и пересекающий полуокружность в некоторой точке A с координатами x_0, y_0 .

Синусом угла, образованного лучами OX и OM , называют ординату точки A , то есть $\sin XOM = y_0$.

Косинусом угла, образованного лучами OX и OM , называют абсциссу точки A , то есть $\cos XOM = x_0$.

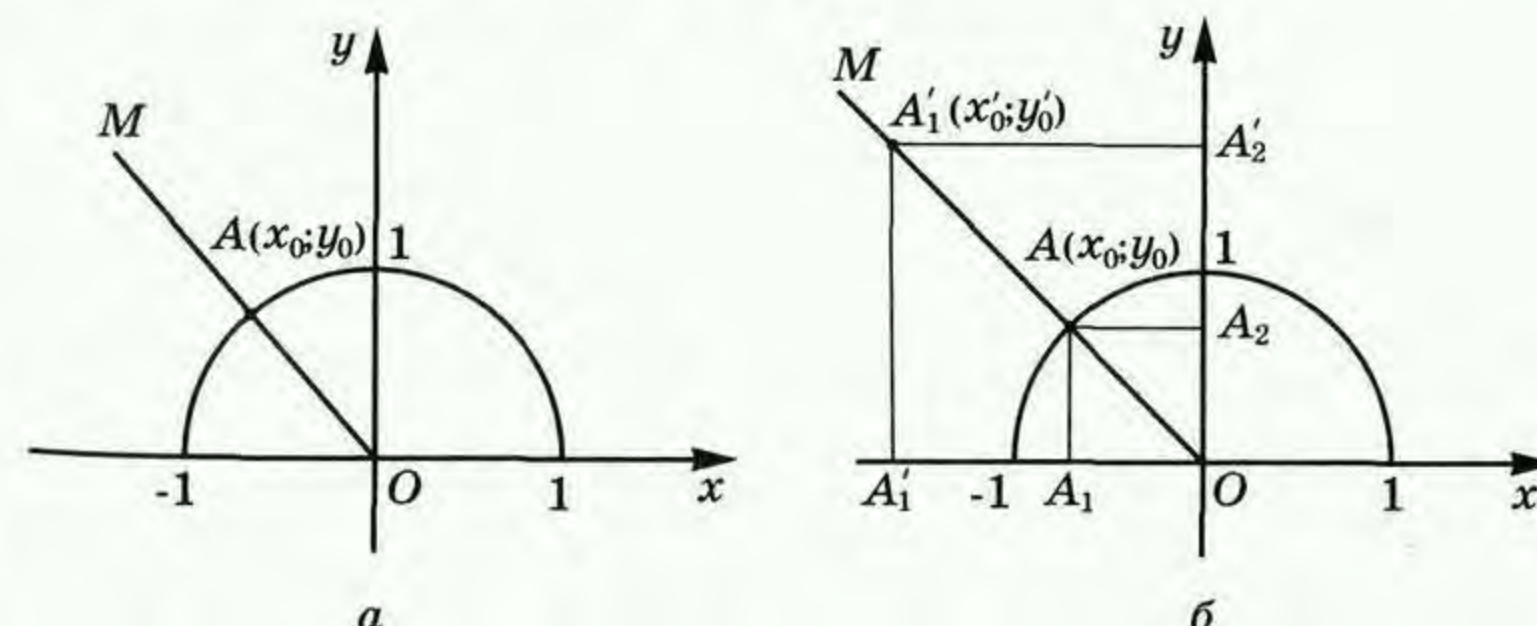


Рис. 46

Тангенсом угла, образованного лучами OX и OM , называют отношение ординаты точки A к ее абсциссе, то есть $\operatorname{tg} \angle XOM = \frac{y_0}{x_0}$.

Котангенсом угла, образованного лучами OX и OM , называют отношение абсциссы точки A к ее ординате, то есть $\operatorname{ctg} \angle XOM = \frac{x_0}{y_0}$.

10.3. Можно дать и другие определения тригонометрических функций (рис. 46, б).

Синусом угла, образованного лучами OX и OM , называют отношение ординаты произвольной точки A' луча OM к длине отрезка OA' .

Косинусом угла, образованного лучами OX и OM , называют отношение абсциссы произвольной точки A' луча OM к длине отрезка OA' .

Тангенсом угла, образованного лучами OX и OM , называют отношение ординаты произвольной точки A' луча OM к ее абсциссе.

Котангенсом угла, образованного лучами OX и OM , называют отношение абсциссы и произвольной точки A' луча OM к ее ординате.

10.4. Данные выше определения равносильны. Докажем, например, что для тупого угла оба определения косинуса равносильны (рис. 46, б).

В силу обобщенной теоремы Фалеса $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OA'_1}{OA'}$. Отсюда следует, что $\frac{-x_0}{1} = \frac{-x'_0}{OA'}$.

Но $x_0 = \cos \angle XOM$. Следовательно, $x_0 = \frac{x'_0}{OA'} = \cos \alpha$. ■

Для остальных случаев доказательство аналогично.

Следствие. Координаты произвольной точки плоскости A равны соответственно $x_0 = a \cdot \cos \alpha$, $y_0 = a \cdot \sin \alpha$, где a — расстояние от начала координат до точки A , а α — угол между осью Ox и лучом OA .

10.5. Для тригонометрических функций произвольного угла α справедливы основные тригонометрические тождества, доказанные ранее нами для острых углов. Докажем, например, что

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

для тупого угла (рис. 47). (Для прямого и острого углов докажите самостоятельно.)

По теореме Пифагора

$$OA^2 = AA'^2 + A'O^2. \quad (2)$$

Но $OA = 1$, $AA' = \sin \alpha$, $A'O = -\cos \alpha$. Тогда равенство (2) примет вид $1^2 = \sin^2 \alpha + (-\cos \alpha)^2$ или $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Тождество

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (3)$$

следует из того, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0}$, $\sin \alpha = y_0$, $\cos \alpha = x_0$.

Аналогично доказывается, что

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (4)$$

Равенства

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (5)$$

и

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (5')$$

получаются из тождества (1) делением обеих частей соответственно на $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ с учетом соотношений (3) и (4).

Тождество $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ вытекает из того, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_0}{x_0} \text{ и } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_0}{y_0}. \quad (6)$$

10.6. Для острых углов имеют место следующие тождества:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad (7)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha. \quad (7')$$

Посмотрим на рисунок 48, а. Пусть $\angle XO A = \alpha$ и $\angle XO A' = 180^\circ - \alpha$.

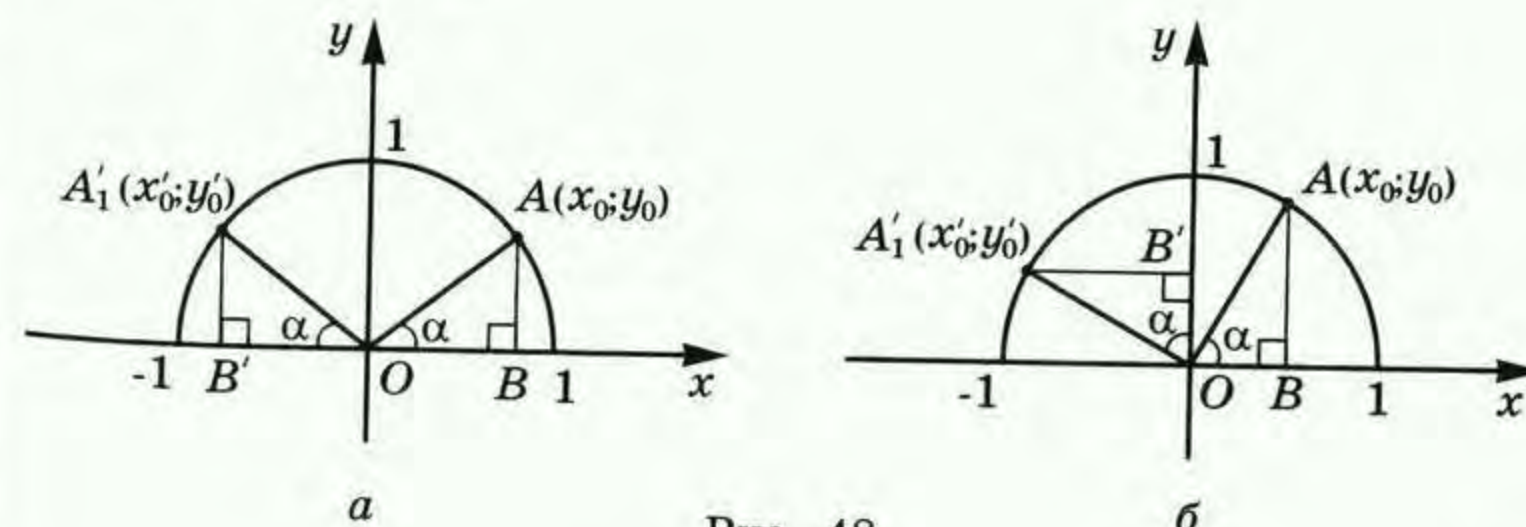


Рис. 48

Если точка A имеет координаты $A(x_0; y_0)$, то точка A' будет иметь координаты $A'(-x_0; y_0)$. (Это следует из равенства прямоугольных треугольников OAB и $OA'B$ по гипотенузе и острому углу.)

Но по определению тригонометрических функций получим $\sin \alpha = y_0$, $\cos \alpha = x_0$, $\sin(180^\circ - \alpha) = y_0$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -x_0$.

Следовательно, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Преобразуем выражения $\sin(90^\circ + \alpha)$ и $\cos(90^\circ + \alpha)$, где α — острый угол.

Воспользуемся рисунком 48, б. $\triangle OAB = \triangle OA'B$ по гипотенузе и острому углу. Тогда $OB' = OB$, $A'B' = AB$ или $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ и $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

Их можно использовать и для нахождения тригонометрических функций тупого угла. Например, $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

10.7. Задача 1. Докажите, что площадь треугольника ABC можно найти по формуле $S = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Дано: треугольник ABC , $BC = a$, $AC = b$ (рис. 49).

Доказать: $S = \frac{1}{2} ab \sin C$.

Доказательство.

1) $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, где $BH \perp AC$.

2) $\angle BCH = 180^\circ - \angle C$ и $\sin BCH = \sin C$.

3) В треугольнике BCH $\angle H = 90^\circ$, $BC = a$, тогда $BH = BC \times \sin(180^\circ - \angle C) = BC \sin C = a \sin C$.

4) $S = \frac{1}{2} ab \sin C$. ■

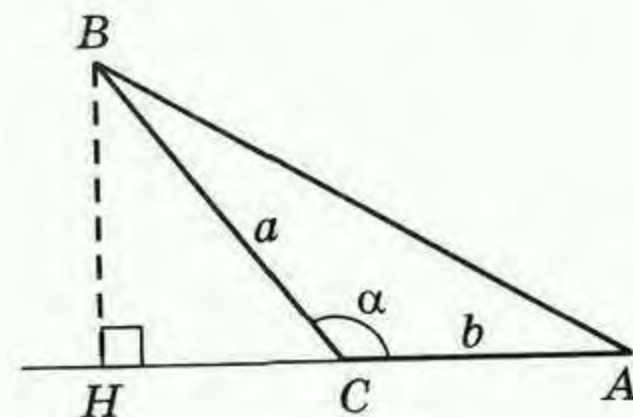


Рис. 49

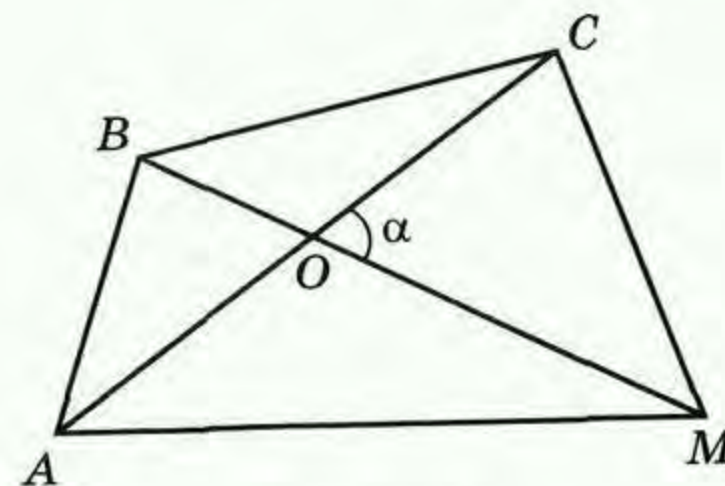


Рис. 50

В качестве следствия из этой задачи решите следующую задачу.

Задача 2. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

Дано: $ABCM$ — четырехугольник, $AC = d_1$, $BM = d_2$, $\angle COM = \alpha$ (рис. 50).

Доказать: $S_{ABCM} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} S_{ABCM} &= S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CMO} + S_{MAO} = \frac{1}{2} BO \cdot AO \sin \alpha + \frac{1}{2} BO \times \\ &\times OC \sin(180^\circ - \alpha) + \frac{1}{2} CO \cdot OM \sin \alpha + \frac{1}{2} OM \cdot OA \sin(180^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{2} BO (AO + OC) \sin \alpha + \frac{1}{2} OM (OC + OA) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BM \times \\ &\times \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$



1. Известно, что точка $C(x; y)$ является серединой отрезка AB , где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Выразите x и y через координаты точек A и B .

2. По какой формуле можно найти расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$?

3. Что называют синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом произвольного угла α , где $0^\circ < \alpha < 180^\circ$?

4. Используя определения, найдите значения тригонометрических функций для углов 0° , 90° , 180° .

5. Какие тождества выполняются для синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов произвольных углов?

6. Докажите, что для острого угла α $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$.

7. Найдите площадь треугольника, если известны две его стороны, равные соответственно 6 см, 8 см, и угол между ними равен 45° .

8. Найдите площадь треугольника, если известны две его стороны, равные соответственно 10 см, 9 см, и угол между ними равен 150° .

9. Найдите площадь трапеции, если известно, что ее диагонали взаимно перпендикулярны и равны соответственно 8 см и 10 см.

10. Диагонали параллелограмма пересекаются под углом 30° и равны соответственно 8 дм и 6 дм. Найдите площадь параллелограмма.

11. Какова наибольшая площадь четырехугольника с диагоналями, равными соответственно 26 см и 18 см?



243. Используя метод координат, докажите, что: а) середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена

от всех вершин треугольника; б) сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

244. Докажите, что четырехугольник $ABCM$, вершины которого имеют координаты $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(8; 7)$, $M(5; 0)$, является ромбом. Найдите его периметр и площадь.

245. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом: а) 3; б) $\sqrt{2}$; в) 2,5.

246. Напишите уравнение прямой AB , если: а) $A(1; -1)$, $B(-3; 2)$; б) $A(2; 5)$, $B(5; 2)$; в) $A(0; 1)$, $B(-4; -5)$.

247. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов: а) 120° ; б) 135° ; в) 150° .

248. Найдите $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что: а) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; б) $\cos \alpha = -0,5$; в) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

249. Найдите $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$, если: а) $\sin \alpha = 0,6$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; б) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; в) $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

250. Известно, что $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{12}$. Найдите $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

251. Постройте угол α , если известно, что: а) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

252. Найдите косинус, тангенс и котангенс острого угла, если его синус равен 0,3.

253. Найдите косинус, тангенс и котангенс тупого угла, если его синус равен 0,3.

254. На сторонах треугольника, равных a и b , отложены от их общей вершины отрезки a_1 и b_1 . Концы этих отрезков соединены. Докажите, что отношение площадей полученного и заданного треугольников равно $\frac{a_1 \cdot b_1}{a \cdot b}$.

255. В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC . Пусть $\angle BKC = \varphi$. Докажите, что площадь треугольника ABC вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} AC \cdot BK \cdot \sin \varphi$.

256. У тетраэдра $MABC$ все боковые ребра равны. Плоские углы при вершине M боковых граней равны. Найдите площадь боковой поверхности тетраэдра, если: а) $MA = 4$ см, $\angle AMB = 45^\circ$; б) $MA = 4$ см, $\angle AMB = 135^\circ$.

257. Диагональ грани куба равна 6 см. Найдите площадь полной поверхности куба.

258. Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, если диагонали боковой грани пересекаются под углом в 30° и длина каждой равна 5 см.



259. В выпуклом четырехугольнике длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны соответственно m и n , а угол между ними равен φ . Докажите, что площадь четырехугольника вычисляется по формуле $S = m \cdot n \cdot \sin \varphi$.

260. Найдите площадь треугольника, если известны: а) два угла α и β , прилежащие к одной из сторон, и высота h_c , опущенная на эту же сторону; б) высоты h_a , h_b , опущенные на две стороны треугольника, и угол между этими сторонами γ ; в) сторона c и два прилежащих к ней угла α и β .

261. Известны две стороны a и b треугольника и угол между ними γ . Найдите биссектрису этого угла.

262. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Вычислите площадь четырехугольника.

263. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Площади треугольников ABO , BCO , CDO равны соответственно 3, 1 и 2. Вычислите площадь треугольника DAO .

264. Длины последовательных сторон выпуклого четырехугольника равны соответственно a , b , c , d . Докажите, что площадь S четырехугольника удовлетворяет неравенствам:

а) $S \leq \frac{1}{2} (ab + cd)$;

б) $S \leq \frac{1}{2} (ad + bc)$;

в) $S \leq \frac{1}{4} (a + c)(b + d)$.

265. Докажите, что для острых углов α и β :

а) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$;

б) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

§ 11. Теорема синусов

11.1. Теорема (синусов). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Дано: треугольник ABC (рис. 51).

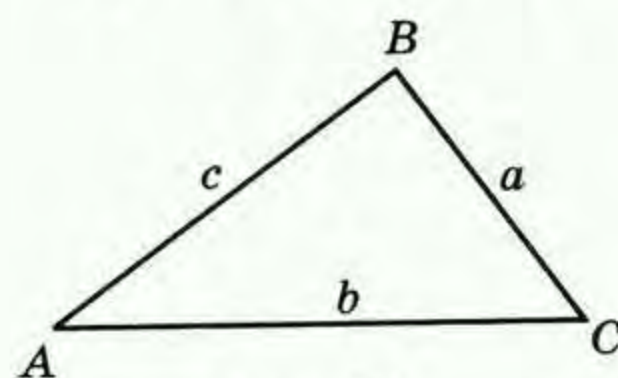


Рис. 51

Доказать: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Доказательство.

Покажем, что $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ и

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}.$$

1) Воспользуемся формулами площади треугольника:

$S = \frac{1}{2} ab \sin C$, $S = \frac{1}{2} ac \sin B$, $S = \frac{1}{2} bc \sin A$. Приравняв правые части первых двух формул, получим $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B$.

2) Разделив обе части на $\frac{1}{2} a \sin C \cdot \sin B$, получим $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$.

3) Аналогично, приравняв правые части двух последних формул и разделив на $\frac{1}{2} c \sin B \sin A$, получим $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$.

4) Тогда $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. ■

11.2. Задача 1. Докажите, что $\frac{a}{\sin A} = 2R$, где R — радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Дано: треугольник ABC , $\omega(O; R)$ — описанная около него окружность.

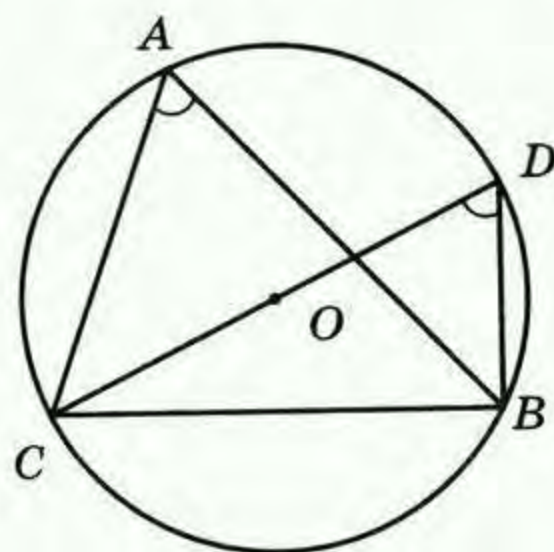


Рис. 52

Доказать: $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Доказательство.

а) $\angle A < 90^\circ$. Проведем CD — диаметр окружности (рис. 52).

1) $\angle A = \angle D$ (как углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

2) Треугольник CDB — прямоугольный, с прямым углом B , так как этот угол опирается на диаметр.

3) Из треугольника CDB получаем $CB = CD \cdot \sin D$.

4) Но поскольку $CD = 2R$, $\angle D = \angle A$, то $CB = 2R \sin A = a$, или $\frac{a}{\sin A} = 2R$. ■

б) Для случая, когда угол A тупой (рис. 53), доказательство проведите сами.

Задача 2. Докажите, что площадь треугольника ABC можно най-

ти по формуле $S = \frac{abc}{4R}$.

Указание. Воспользуйтесь формулой площади треугольника $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ и результатом предыдущей задачи:

$$\frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Задача 3. В треугольнике дана сторона $a = 4$ см и два угла $\angle B = 30^\circ$ и $\angle C = 45^\circ$. Найдите стороны AB , AC и $\angle A$.

Дано: треугольник ABC , $BC = a = 4$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.

Найти: AB , AC , $\angle A$.

Решение: 1) Поскольку сумма углов треугольника равна 180° , находим угол A : $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

2) Зная сторону и все углы, по теореме синусов находим две оставшиеся стороны:

$$b = a \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 4 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 4 \cdot \frac{0,500}{0,966} \approx 2,07 \text{ (см)}, \text{ где } b = AC.$$

$$c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 4 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 4 \cdot \frac{0,707}{0,966} \approx 2,93 \text{ (см)}, \text{ где } c = AB.$$

Ответ: $AB = 2,93$ см, $AC = 2,07$ см, $\angle A = 105^\circ$.

Задача 4. В треугольнике ABC даны две стороны $BC = 6$ см, $AC = 8$ см и противолежащий стороне BC угол A , равный 30° . Найдите остальные углы треугольника и сторону AB .

Дано: треугольник ABC , $BC = a = 6$ см, $AC = b = 8$ см, $\angle A = 30^\circ$.

Найти: AB , $\angle B$, $\angle C$.

Решение: 1) По теореме синусов находим значение синуса угла B : $\sin B = \frac{b}{a} \cdot \sin A = \frac{8}{6} \cdot \sin 30^\circ \approx 0,667$. Этому значению синуса соответствуют два угла: $\angle B_1 \approx 42^\circ$ и $\angle B_2 \approx 138^\circ$.

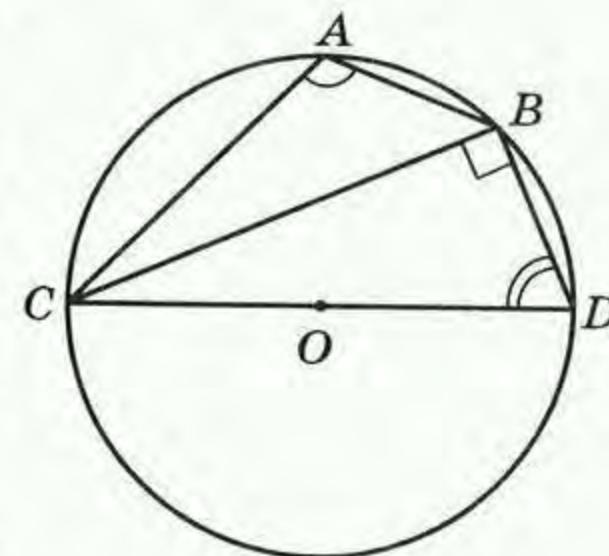


Рис. 53

2) Для случая $\angle B_1 \approx 42^\circ$ находим третий угол: $\angle C_1 = 180^\circ - \angle A - \angle B \approx 108^\circ$.

3) По теореме синусов находим третью сторону $AB = c_1$:

$$c_1 = a \cdot \frac{\sin C_1}{\sin A} \approx 6 \cdot \frac{\sin 180^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 6 \cdot \frac{0,951}{0,500} \approx 11,4 \text{ (см)}.$$

4) Для случая $\angle B_2 \approx 138^\circ$ находим третий угол $\angle C_2 = 180^\circ - \angle A - \angle B \approx 12^\circ$. По теореме синусов находим третью сторону $AB = c_2$:

$$c_2 = a \cdot \frac{\sin C_2}{\sin A} \approx 6 \cdot \frac{\sin 12^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 2,49 \text{ (см)}.$$

Ответ: $AB = 11,4$ см или $AB = 2,49$ см, $\angle B \approx 42^\circ$ или $\angle B \approx 138^\circ$, $\angle C \approx 108^\circ$ или $\angle C \approx 12^\circ$.



1. Сформулируйте и докажите теорему синусов.
2. Как найти радиус описанной около треугольника окружности, если известны сторона треугольника и противолежащий ей угол?
3. Радиус описанной около треугольника окружности равен 8 см. Найдите длину стороны треугольника, противолежащей углу, равному 30° .
4. Дан треугольник ABC . Найдите $\sin C$, если: а) $AB = 6$ см, $CB = 3$ см, $\angle A = 30^\circ$; б) $AB = 6$ см, $CB = 4$ см, $\angle A = 30^\circ$; в) $AB = 6$ см, $CB = 3\sqrt{2}$ см, $\angle A = 30^\circ$.

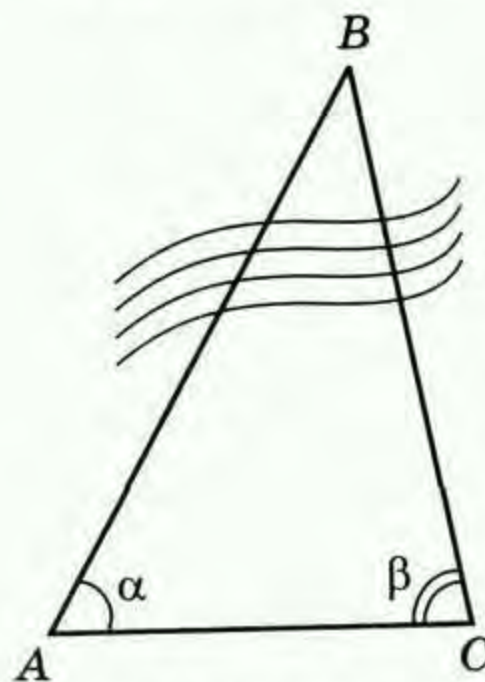


Рис. 54

5. Дан треугольник ABC . Найдите $\sin C$, если: а) $AB = 4$ см, $AC = 3$ см, $\sin B = 0,6$; б) $AB = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 4$ см.
6. Как найти площадь треугольника по трем сторонам и радиусу описанной около него окружности?
7. Площадь треугольника равна 56, а произведение трех его сторон равно 168. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.
8. Как найти расстояние от точки A до недоступной точки B (рис. 54), зная расстояние AC и углы α и β ?



266. В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $\sin A = 0,3$, $\sin C = 0,6$. Найдите BC .

267. В треугольнике ABC $AB = 5$ см, $AC = 4$ см, $BC = 7$ см, $\sin C = 0,6$. Найдите синусы других углов.

268. Найдите радиус окружности, описанной около равнос-
стороннего треугольника со стороной a .

269. Найдите радиус окружности, описанной около равно-
бедренного прямоугольного треугольника с катетом a .

270. Найдите сторону равностороннего треугольника, ес-
ли радиус описанной около него окружности равен r .

271. Найдите сторону равнобедренного прямоугольного
треугольника, если радиус описанной около него окружности
равен r .

272. В треугольнике дана сторона $a = 4$ см и два угла
 $\angle B = 60^\circ$ и $\angle C = 45^\circ$. Найдите стороны b и c и угол A .

273. Спортивный самолет летит по замкнутому маршруту,
имеющему форму треугольника. Два угла этого треугольника
равны соответственно 60° и 100° . Сторону, лежащую против
третьего угла, самолет пролетел за 1 час. За какое время он
пролетит весь маршрут, сохраняя постоянную скорость?

274. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите две
другие стороны и третий угол, если: а) $BC = 20$, $\angle A = 75^\circ$,
 $\angle B = 60^\circ$; б) $BC = 35$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 120^\circ$; в) $AC = 12$, $\angle A =$
 $= 36^\circ$, $\angle B = 25^\circ$; г) $AB = 14$, $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 48^\circ$.

275. У тетраэдра $MABC$ ребра BC и AC равны соответ-
ственно 12 см и 5 см. Угол BCA равен 120° . Найдите ребро AB
и углы треугольника ABC .

276. Дан тетраэдр $MABC$. Найдите его боковые ребра MA
и MB , если $AB = 20$ см, $\angle MAB = 75^\circ$, $\angle MBA = 60^\circ$.

277. В треугольнике даны две стороны и угол, противоле-
жащий одной из сторон. Найдите два других угла и третью
сторону треугольника, если: а) $BC = 12$, $AC = 5$, $\angle A = 120^\circ$;
б) $BC = 27$, $AC = 9$, $\angle A = 138^\circ$; в) $BC = 34$, $AC = 12$, $\angle A = 164^\circ$;
г) $BC = 2$, $AC = 4$, $\angle A = 60^\circ$.

278. Угол при вершине равнобедренного треугольника ра-
вен 120° . Найдите: а) основание, если боковая сторона рав-
на 1; б) боковую сторону, если основание равно 1.



279. Три дороги образуют треугольник ABC . При этом
 $\angle A = 20^\circ$, $\angle B = 150^\circ$. Автомобилист, находясь в пункте A ,
хочет попасть в пункт C побыстрее. AC и CB проселки, AB —
шоссе. Скорость по шоссе в два раза выше, чем по проселоч-
ной дороге. Какой маршрут ему выбрать?

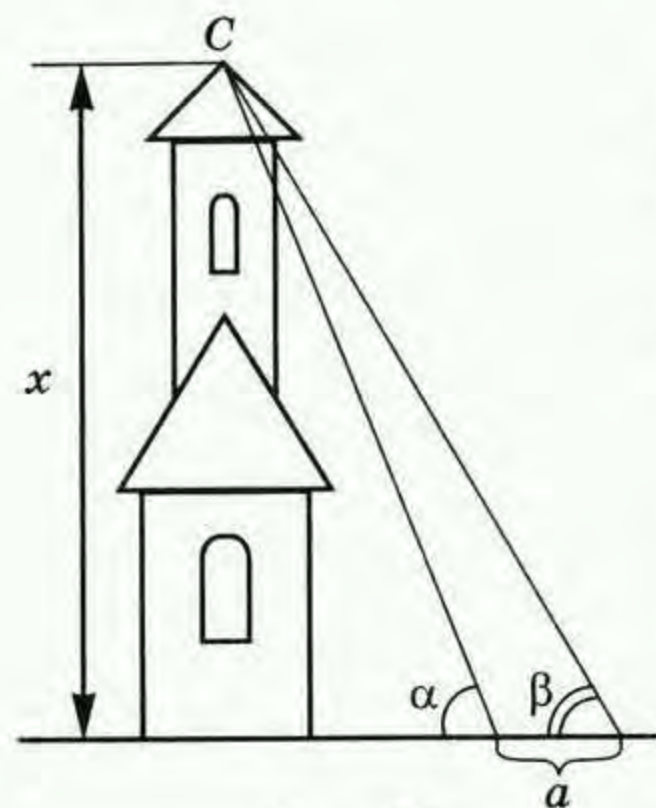


Рис. 55

280. В треугольнике ABC $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Может ли синус угла B быть равен $\frac{3}{4}$?

281. Найдите высоту x башни (рис. 55) по углам α и β и расстоянию a .

282. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$, $AB + AC = 1$, $\angle ABC = \varphi$. Найдите длину отрезка BC .

283. В равносторонний треугольник ABC вписан равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ такой, что $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $\angle C_1A_1B = \angle CB_1A_1 = \angle AC_1B_1 = \varphi$.

Найдите отношение сторон этих треугольников.

284. Найдите площадь параллелограмма, если известны его диагональ d и углы 45° и 30° , которые она составляет с его сторонами.

285. В трапеции $ABCD$ известны AB , BC , $\angle B$ и $\angle C$. Как найти другие стороны трапеции? Приведите примеры.

§ 12. Теорема косинусов

12.1. Теорема (косинусов). Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

Дано: треугольник ABC .

Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Доказательство. Возможны три случая: угол A — острый, угол A — прямой, угол A — тупой. Докажем утверждение теоремы для всех трех случаев.

Пусть угол A острый. Из двух углов B и C , по крайней мере, один острый. Пусть острым будет угол C . Выберем систему координат так, чтобы начало координат было в точке A , а точка C находилась на оси Ox (рис. 56, а).

Тогда точки A , B и C имеют соответственно координаты: $A(0; 0)$, $C(b; 0)$, $B(c \cos A, c \sin A)$.

1) В треугольнике ABC опустим высоту BF . Тогда $BF = c \sin A$, $FC = AC - AF = b - c \cos A$.

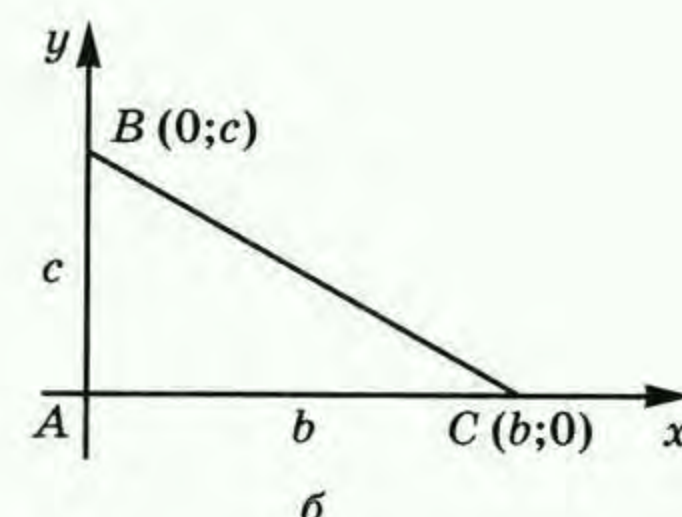
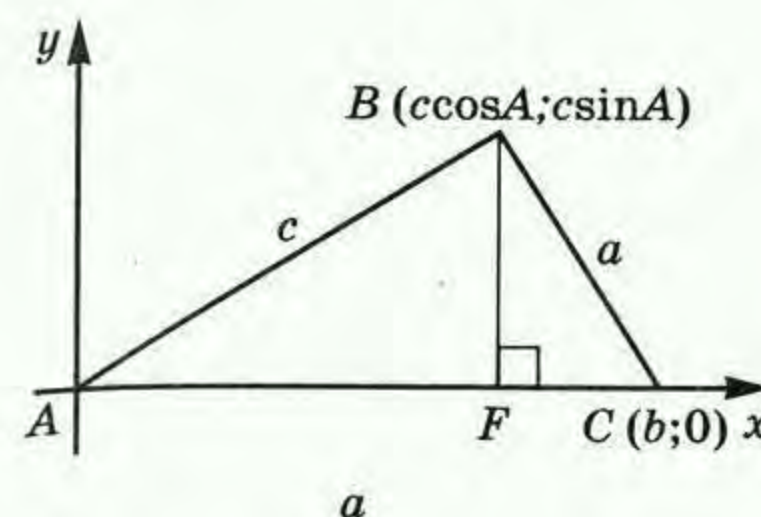


Рис. 56

2) Для треугольника BFC запишем теорему Пифагора: $BC^2 = BF^2 + FC^2$. Отсюда $a^2 = c^2 \sin^2 A + (b - c \cos A)^2$.

3) Преобразуем записанное выше равенство $a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 - 2bc \cos A + c^2 \cos^2 A$. Далее $a^2 = c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) + b^2 - 2bc \cos A$. Поскольку $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, получим $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A$. ■

Заметим, что верными будут равенства:

1) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$;

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$;

3) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

4) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$;

5) $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Для случаев прямого угла (рис. 56, б) и тупого угла (рис. 57) докажите самостоятельно.

12.2. Теоремы синусов и косинусов позволяют находить по некоторым известным сторонам и углам треугольника остальные стороны и углы. Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. В треугольнике даны две стороны: $a = 10$ см и $b = 14$ см и угол C между ними, равный 60° . Найдите сторону c и два других угла: $\angle A$ и $\angle B$.

Дано: треугольник ABC , $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $\angle C = 60^\circ$.

Найти: AB , $\angle A$, $\angle B$.

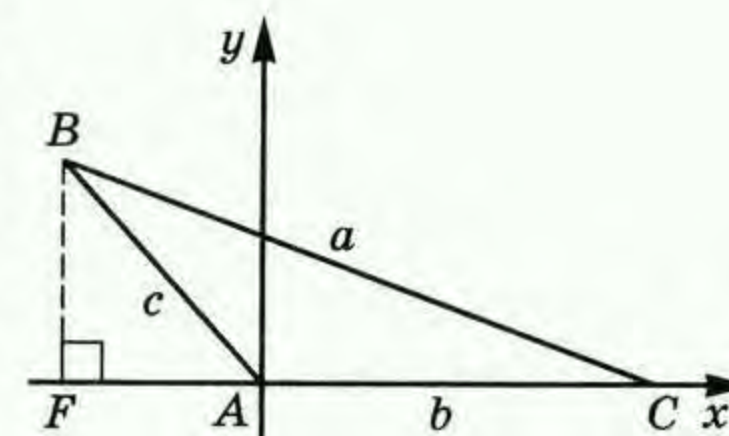


Рис. 57

Решение: 1) По теореме косинусов находим сторону AB :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{100 + 196 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 0,500} = \sqrt{156} \approx 12,5 \text{ (см)}.$$

2) По теореме косинусов находим косинус угла A , а затем и сам этот угол: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{196 + 436,81 - 100}{585,2} = \frac{252}{585,2} \approx 0,72$, $\angle A \approx 4,4^\circ$.

Примечание. Для нахождения угла A можно было бы воспользоваться и теоремой синусов.

3) Учитывая, что сумма углов треугольника равна 180° , находим угол B : $\angle B = 180^\circ - \angle C - \angle A \approx 76^\circ$.

Задача 2. В треугольнике ABC даны три стороны: $BC = 2$ см, $AC = 3$ см, $AB = 4$ см. Найдите углы треугольника.

Дано: треугольник ABC , $BC = 2$ см, $AC = 3$ см, $AB = 4$ см. Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Решение. Углы A и B найдем, используя теорему косинусов:

$$1) \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0,875, \text{ откуда } \angle A \approx 29^\circ.$$

$$2) \text{ Аналогично, } \cos B = 0,688, \text{ следовательно, } \angle B \approx 47^\circ.$$

$$3) \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B \approx 180^\circ - 47^\circ - 29^\circ = 104^\circ.$$

Примечание. Для нахождения угла B можно было бы воспользоваться и теоремой синусов.

Задача 3*. Докажите, что длину медианы треугольника можно найти по формуле $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

Указание. Пусть BM — медиана треугольника ABC (рис. 58). Тогда по теореме косинусов и в силу равенства $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ получим, что $c^2 = \frac{b^2}{4} + m_b^2 - m_b \cdot b \cdot \cos \alpha$; $a^2 = \frac{b^2}{4} + m_b^2 + m_b \cdot b \cdot \cos \alpha$.

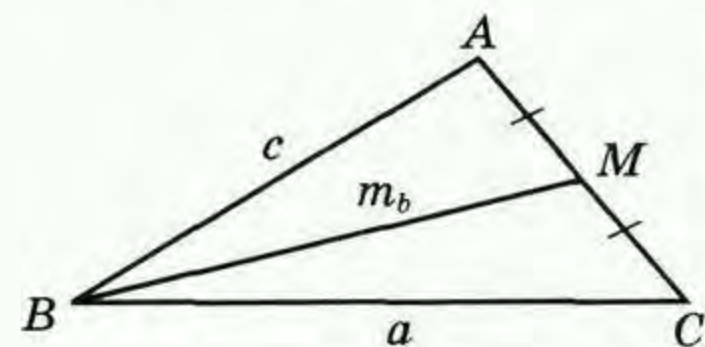


Рис. 58

Сложим эти тождества и, решая получившееся равенство относительно m_b , получим искомую формулу.

12.3*. Вы хорошо знаете, что такое периметр треугольника. Полупериметром называют полусумму сторон треугольника.

Иными словами, полупериметр — это половина периметра треугольника. Полупериметр обозначается буквой p . Из сказанного выше следует, что если a , b и c — стороны треугольника, то

$$p = \frac{1}{2} (a + b + c).$$

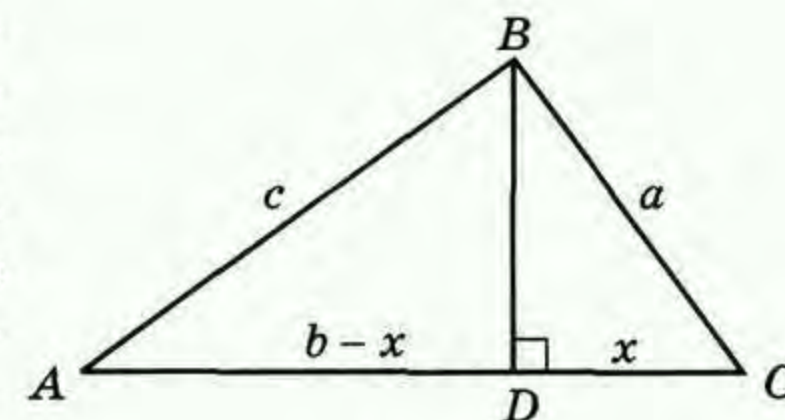


Рис. 59

Теорема (формула Герона). Если даны три стороны треугольника a , b и c , то его площадь вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1)$$

Дано: треугольник ABC (рис. 59) со сторонами $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Доказать: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Доказательство. Пусть B — наибольший угол треугольника. Тогда углы A и C будут острыми. Опустим из вершины B высоту. Ее основание — точка D будет лежать на стороне AC . Обозначим отрезок DC через x .

1) Запишем для треугольника ABC теорему косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cos C$. Поскольку $a \cos C = x$, получим $c^2 = a^2 + b^2 - 2bx$.

2) Прибавив к правой части и вычтя из нее $2ab$, получим $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2bx$.

3) Выделив в правой части сначала квадрат суммы, а потом квадрат разности, получим

$$c^2 = (a+b)^2 - 2b(a+x); \quad (2)$$

$$c^2 = (a-b)^2 + 2b(a-x). \quad (3)$$

4) Переносим в левую часть соответственно $2b(a+x)$ и $2b(a-x)$, а все остальное переносим в правую часть и используя формулы разности квадратов, получим:

$$2b(a+x) = (a+b+c)(a+b-c);$$

$$2b(a-x) = (c-a+b)(c+a-b).$$

5) Поскольку $2p = a + b + c$, то $a + b - c = 2p - 2c$, $c + b - a = 2p - 2a$, $a + c - b = 2p - 2b$, предыдущие формулы запишутся в виде $2b(a+x) = 2p(2p-2c)$, $2b(a-x) = 2(p-a) \times 2(p-b)$.

6) Умножив левые и правые части, получим:

$$4b^2(a^2 - x^2) = 8p(p-a)(p-b)(p-c).$$

7) Разделив обе части на 8 и учитывая, что в силу теоремы Пифагора $a^2 - x^2 = h_b^2$, получим $\left(\frac{bh_b}{2}\right)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

8) Но поскольку $\frac{bh_b}{2} = S_{ABC}$, то, извлекая квадратный корень из обеих частей, получим формулу (1)

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



1. Сформулируйте и докажите теорему косинусов.
2. В треугольнике две стороны равны соответственно 6 см и 8 см, а угол между ними равен 60° . Найдите третью сторону треугольника.
3. Что называют периметром треугольника? Полупериметром треугольника?
4. Запишите формулу Герона.
5. Используя формулу Герона, найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .
6. Как будет выглядеть формула Герона для равнобедренного треугольника с боковой стороной a и основанием b ?
7. Чему будет равна площадь треугольника со сторонами 4 см, 6 см и 8 см?
8. Докажите, что у тупоугольного треугольника квадрат стороны, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других сторон.
9. Докажите, что у остроугольного треугольника квадрат любой стороны меньше суммы квадратов двух других сторон.
10. В треугольнике ABC $AB = 2$ см, $AC = 3$ см, $\cos A = 0,5$. Найдите BC .
11. Найдите косинус наибольшего угла треугольника ABC , если $AC = 5$ см, $BC = 3$ см, $AB = 3$ см.



286. В треугольнике стороны $AB = 6$ см, $BC = 7$ см и $AC = 9$ см. Верно ли, что угол между сторонами AB и BC равен 45° ?

287. Даны две стороны треугольника и угол между ними. Найдите третью сторону и два других угла, если: а) $BC = 7$, $AC = 23$, $\angle C = 130^\circ$; б) $AC = 9$, $AB = 17$, $\angle A = 95^\circ$; в) $AC = 14$, $AB = 10$, $\angle B = 145^\circ$; г) $BC = 32$, $AB = 23$, $\angle B = 152^\circ$; д) $BC = 24$, $AB = 18$, $\angle B = 15^\circ$.

288. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если: а) $BC = 7$, $AC = 2$, $AB = 8$; б) $BC = 4$, $AC = 5$, $AB = 7$; в) $BC = 15$, $AC = 24$, $AB = 18$; г) $BC = 23$, $AC = 17$, $AB = 39$; д) $BC = 55$, $AC = 21$, $AB = 38$.

289. Вычислите неизвестные элементы треугольника ABC :

a	b	c	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
3		2		60°	
	3	4	135°		
2,4	1,3				28°
0,15	0,62			161°	
4	5	6			
4	6	6			
12	5	13			
0,3	0,4	0,5			

290. Определите вид треугольника по углам, если его стороны равны: а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 10; в) 5, 10, 10; г) 30, 40, 50; д) a , $a+1$, $a+2$.

291. Стороны треугольника равны соответственно 5 см, 6 см и 7 см. Найдите косинусы углов треугольника.

292. Даны три стороны a , b , c треугольника ABC . Докажите, что если $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, противолежащий стороне c , острый.

293. Даны три стороны a , b , c треугольника ABC . Докажите, что если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, противолежащий стороне c , тупой.

294. Докажите, используя теорему косинусов, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

295. Даны диагонали a и c параллелограмма $ABCD$. Угол между ними равен α . Найдите стороны параллелограмма.

296. Даны стороны a и b параллелограмма $ABCD$. Угол между ними равен α . Найдите диагонали параллелограмма.

297. В треугольнике две стороны равны соответственно 5 см и 6 см, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите медианы треугольника, проведенные к этим сторонам.

298. У тетраэдра $MABC$ ребра AB и AM равны 10 см и 14 см соответственно. Угол MAV равен 60° . Найдите ребро MB и углы грани AMB .

299. У тетраэдра $MABC$ ребра AB , AC и BC равны соответственно 2 см, 3 см, 4 см. Найдите углы грани ABC .

300. У тетраэдра $MABC$ ребра MB и MA равны 6 см и 5 см соответственно. Синус угла AMB равен 0,6. Найдите ребро AB .



301. Найдите площадь треугольника по трем его сторонам: а) 13 см, 14 см, 14 см; б) 6 дм, 25 дм, 29 дм. Вычислите высоты этих треугольников.

302. Стороны треугольника равны соответственно 5 см, 6 см и 7 см. Найдите высоты треугольника.

303. Стороны треугольника ABC равны соответственно $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найдите высоту треугольника, опущенную из вершины C .

304. У тетраэдра $MABC$ все ребра равны. Сумма их длин равна 24 см. Найдите площадь каждой грани.

305. Докажите, что большая медиана треугольника проводится к его меньшей стороне. Докажите обратное утверждение.

306. Стороны треугольника равны 27 см и 29 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, — 26 см. Вычислите площадь треугольника.

307. Стороны треугольника равны 4 см, 5 см, 6 см. Вычислите его наибольшую медиану и наименьшую биссектрису.

308. В равнобедренном треугольнике известны его основание, периметр и площадь. Установите связь между этими величинами.

309. В выпуклом четырехугольнике известны две стороны, диагональ и углы, которые она образует с двумя сторонами. Хватит ли этих данных, чтобы вычислить остальные элементы четырехугольника?

310. Две стороны треугольника постоянны, а угол между ними увеличивается. Докажите, что третья сторона треугольника также увеличивается.

311. В треугольнике известны три его стороны. Как вычислить: а) биссектрисы треугольника; б) высоты треугольника?

312. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, зная его стороны? Найдите радиус этой окружности.



Задачи к главе III

313. Чему будет равна площадь треугольника со сторонами 4 см, 6 см и 8 см?

314. Найдите диагонали параллелограмма, стороны которого равны a и b , а заключенный между ними угол — 120° .

315. Пользуясь теоремой синусов, докажите, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит его противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

316. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1 . Докажите, что $\frac{AC}{BC} = \frac{\sin C_1CB}{\sin C_1CA}$.

317. Пользуясь формулой Герона, вычислите площадь равностороннего треугольника со стороной p .

318. Выразите радиус r окружности, вписанной в треугольник, через его стороны a , b и c .

319. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = 4$, $BC = 6$, $CD = 7$, $AD = 3$, $BD = 5$.

320. Вычислите площадь треугольника, если две его стороны равны a и b , а угол, заключенный между ними, равен: а) 45° ; б) 60° ; в) 30° ; г) 120° ; д) 150° .

321. Найдите площадь четырехугольника, если его диагонали равны g и f , а угол между ними равен: а) 45° ; б) 60° ; в) 30° ; г) 120° ; д) 150° .

322. Найдите средний по величине угол треугольника, стороны которого равны: а) 8 см, 15 см, 13 см; б) 2 см, $5\sqrt{3}$ см, 7 см; в) 7 см, $15\sqrt{2}$ см, 17 см.

323. Найдите наибольший угол треугольника, стороны которого равны: а) 5 см, 16 см, 19 см; б) 11 см, 24 см, 31 см.

324. Найдите с помощью таблиц значений тригонометрических функций углы треугольника, стороны которого равны 7 см, 8 см и 9 см.

325. Одна из сторон треугольника равна 13 см. Найдите две другие, если разность их равна 7 см, а угол между ними — 60° .

326. В треугольник ABC вписана окружность, которая точкой касания делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ дм и $DC = 4$ дм. Найдите стороны AB и BC , если $\angle A = 60^\circ$.

327. Острый угол параллелограмма равен 60° . Найдите его стороны, если: а) периметр параллелограмма равен 22 см, а меньшая диагональ — 7 см; б) разность сторон равна 16 см, а меньшая диагональ — 19 см; в) периметр равен 30 см, а большая диагональ — 13 см; г) отношение сторон равно $5:8$, а меньшая диагональ — 28 см.

328. Одна из сторон треугольника равна 13 см; две другие, разность которых равна 1 см, образуют угол в 120° . Найдите два других угла треугольника.

329. Найдите среднюю линию трапеции, если ее боковые стороны равны 9 см и 12 см, а основания и меньшая диагональ относятся как $9:6:7$.

330. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) через вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке D так, что $\angle BDC = 60^\circ$. Найдите AB , если $AD = 3$ дм, а $DC = 8$ дм.

331. В окружность вписан четырехугольник, две стороны которого равны 8 см и 15 см, а угол между ними 60° . Найдите две другие стороны четырехугольника, если одна из них больше другой на 1 см.

332. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна $2\sqrt{3}$ дм и удалена от центра окружности на 1 дм. Найдите угол, противолежащий этой стороне.

333. Сторона BC треугольника ABC равна 25 дм, высота BD равна 15 дм, радиус описанной окружности R равен 32,5 дм. Найдите две другие стороны треугольника.

334. Найдите основание равнобедренного треугольника, если синус угла при основании равен 0,6, а боковая сторона больше радиуса описанной окружности на 7,5 см.

335. Меньшая сторона треугольника относится к радиусу описанной окружности как $6:5$, а две другие стороны равны 20 см и 21 см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

336. Стороны треугольника равны 17 см, 25 см и 28 см. Найдите радиус полуокружности, вписанной в этот треуголь-

ник, если центр ее находится на большей стороне треугольника.

337. Стороны параллелограмма и его меньшая диагональ относятся как $10:21:17$ соответственно. Найдите меньшую высоту параллелограмма, если его площадь равна 672 см^2 .

338. Найдите высоты параллелограмма, стороны которого равны 25 см и 56 см, а меньшая диагональ равна 39 см.

339. В треугольник, площадь которого равна 84 см^2 , вписана окружность, делящая одну из сторон треугольника на отрезки, равные 6 см и 8 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

340. Периметр параллелограмма равен 90 см, одна из диагоналей равна 25 см и площадь равна 420 см^2 . Найдите вторую диагональ параллелограмма.

341. Стороны треугольника ABC равны a, b, c , угол A равен 60° . Докажите, что: а) $\cos B = \frac{2c-b}{2a}$; б) $\cos C = \frac{2b-c}{2a}$.

342. Меньшая сторона треугольника равна 11 см, а разность двух других — 4 см; против средней по величине стороны треугольника лежит угол в 60° . Найдите косинусы двух других углов.

343. Около окружности описан четырехугольник, две смежные стороны которого равны 5 см и 12 см и образуют прямой угол. Найдите две другие стороны четырехугольника, если угол между ними равен 60° .

344. Около окружности описан четырехугольник, две смежные стороны которого равны 2 дм и 3 дм и образуют угол в 60° . Найдите две другие стороны четырехугольника, если они образуют угол в 120° .

345. В равнобедренной трапеции боковая сторона больше меньшего основания на 8 см. Диагональ трапеции равна $8\sqrt{2}$ см и образует с большим основанием угол в 45° . Найдите общее основание трапеции.

346. В равнобедренной трапеции боковая сторона меньше меньшего из оснований на 4 см. Диагональ трапеции равна $8\sqrt{3}$ см и образует с большим основанием угол в 30° . Найдите большее основание трапеции.

347. Из внешней точки A проведены к окружности касательная AB и секущая ACD ; в окружности проведены хорды

BD и BC . Найдите BC , если $BD = 56$ см, $AD - AB = 24$ см и $\angle A = 60^\circ$.

348. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, у которого $AB = 66$ см, $BC = 77$ см и диагональ $AC = 77$ см. Биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в одной и той же точке. Найдите неизвестные стороны четырехугольника.

349. Квадраты двух меньших сторон треугольника относятся как $1 : 2$, причем против меньшей из них лежит угол в 30° . Найдите больший угол треугольника.

350. Большее основание равнобедренной трапеции равно 12 см, а угол при основании — 75° . Диагональ трапеции образует с основанием угол в 45° . Найдите меньшее основание трапеции.

351. Две стороны треугольника равны a и b . Выразите третью сторону c треугольника через a и b , если она равна радиусу окружности, описанной около треугольника.

352. Используя теорему синусов и свойство функции синуса, докажите, что против большего угла остроугольного треугольника лежит большая сторона, и обратное утверждение.



353. Докажите, что $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

354. Докажите, что $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, пользуясь теоремой синусов (A и B — углы треугольника).

355. Стороны треугольника равны соответственно 5 см, 6 см и 7 см. Найдите биссектрисы углов треугольника.

356. В треугольнике ABC биссектриса угла B , который равен 120° , делит сторону AC на отрезки 21 см и 35 см. Найдите AB , BC и биссектрису BD .

357. В треугольнике ABC биссектриса угла B делит сторону AC на отрезки $AD = 15$ см и $DC = 24$ см и образует с этой стороной угол в 60° . Найдите AB и BC .

358. Найдите боковую сторону равнобедренного треугольника, если синус угла (острого) при вершине равен $0,96$, а радиус описанной около него окружности равен $12,5$ см.

359. В окружность вписан треугольник, разность между большей и меньшей сторонами которого равна 4 дм, а третья сторона удалена от центра окружности на 2 дм. Радиус окружности 4 дм. Найдите стороны треугольника.

360. В окружность, радиус которой равен $7\sqrt{3}$ дм, вписан треугольник. Одна из сторон треугольника равна 21 дм, а две другие относятся между собой как $5 : 8$. Найдите неизвестные стороны треугольника.

361. Площадь треугольника равна 56 см². Одна из сторон этого треугольника равна 14 см, а один из углов, прилежащий к ней, — 45° . Найдите радиус описанной окружности.

362. Докажите, что площадь треугольника ABC равна $2R^2 \sin A \sin B \sin C$ (R — радиус описанной окружности).

363. Докажите, что в треугольнике ABC $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$.

364. Синусы двух острых углов треугольника равны $\frac{3}{5}$ и $\frac{5}{13}$; радиус описанной окружности равен $32,5$ см. Найдите стороны и площадь треугольника.

365. Площадь треугольника равна 84 см². Меньшая сторона его равна 13 см, а радиус описанной окружности равен $8,125$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

366. Меньшая из сторон треугольника равна 25 см, а разность двух других его сторон равна 11 см. Радиус описанной около треугольника окружности равен $32,5$ см. Найдите площадь треугольника.

367. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 18$ см, $BC = 22$ см, $CD = 27$ см. Найдите диагональ AC , если она делит четырехугольник на два равновеликих треугольника.

368. Найдите площадь треугольника, одна из сторон которого равна 28 см, а медианы, проведенные к двум другим сторонам, равны 39 см и 45 см.

369. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 15$ см, $BC = 37$ см, $CD = 17$ см и $AD = 39$ см. Найдите диагональ AC , зная что она делит площадь четырехугольника в отношении $4 : 5$.

Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга.



§ 13. Правильные многоугольники

13.1. Правильным многоугольником называют выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и все стороны.

Вы уже знакомы с двумя правильными многоугольниками. Это равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке 60 изображены правильные пятиугольник, семиугольник и восьмиугольник.

Ранее мы доказали, что сумма всех углов n -угольника вычисляется по формуле $S_n = (n - 2) \cdot 180^\circ$. Но поскольку в правильном n -угольнике все углы равны, то величина каждого угла α_n составит n -ю часть от суммы всех углов правильного n -угольника, следовательно,

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ.$$

13.2. Окружность называют *описанной* около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности. При этом многоугольник называют *вписанным* в окружность.



Рис. 60

Заметим, что центр описанной окружности равноудален от вершин вписанного многоугольника.

Теорема (об окружности, описанной около правильного многоугольника). Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Дано: $A_1A_2A_3\dots A_n$ — правильный многоугольник.

Доказать: существует точка, равноудаленная от всех вершин. Она единственная.

Доказательство. 1. Докажем существование. Пусть O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 61). Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что

$$OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n.$$

1) Поскольку $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, следовательно, треугольник A_1A_2O равнобедренный и $OA_1 = OA_2$.

2) Треугольники A_1A_2O и A_3A_2O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $OA_3 = OA_1$.

3) Аналогично можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

4) Итак, $OA_1 = OA_2 = \dots = OA_n$, значит, точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность $\omega(O, OA_1)$ является описанной около многоугольника.

2. Докажем единственность. Для этого рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3 . Так как через эти точки проходит только одна окружность, то и около многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ можно описать только одну окружность. ■

13.3. Окружность называют *вписанной* в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности, а многоугольник называют *описанным* около окружности.

Заметим, что центр вписанной окружности равноудален от прямых, содержащих стороны описанного многоугольника.

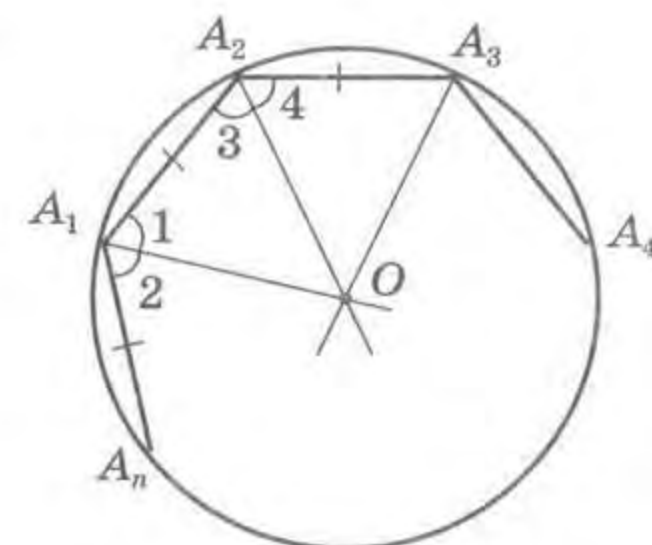


Рис. 61

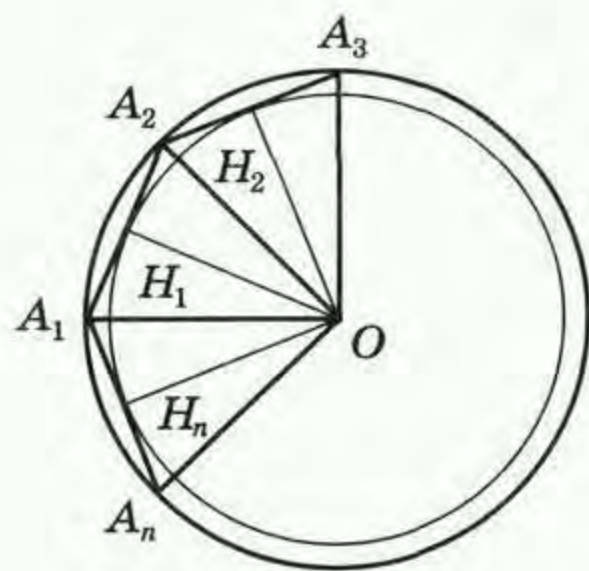


Рис. 62

Теорема (об окружности, вписанной в правильный многоугольник). В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Дано: $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник.

Доказать: существует точка, равноудаленная от прямых, содержащих стороны многоугольника. Она единственная.

Доказательство. 1. Докажем существование. Пусть O — центр описанной окружности (рис. 62).

1) В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что $\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = \dots = \triangle OA_nA_1$, поэтому высоты этих треугольников, проведенные из вершины O , также равны: $OH_1 = OH_2 = \dots = OH_n$.

2) Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки $H_1, H_2, \dots, H_n$ и касается сторон многоугольника в этих точках, значит, окружность вписана в рассматриваемый многоугольник.

2. Докажем единственность. Предположим, что наряду с окружностью $\omega (O, OH_1)$ есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда ее центр O_1 равноудален от сторон многоугольника, то есть точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, то есть равен OH_1 . Таким образом, вторая окружность совпадает с первой. ■

Следствие 1. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эту точку называют центром правильного многоугольника.

13.4. Пусть S — площадь правильного n -угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно

вписанной и описанной окружностей. Установим некоторые зависимости между этими величинами:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r. \quad (1)$$

Для доказательства соединим центр многоугольника с его вершинами (см. рис. 62). Многоугольник разобьется на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2} a_n r$. Следовательно,

$$S = n \frac{1}{2} a_n r = \frac{1}{2} (na_n) r = \frac{1}{2} Pr.$$

Выведем следующие формулы:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad (2)$$

$$r = R \cos \frac{180^\circ}{n}. \quad (3)$$

Для их вывода воспользуемся рисунком 62. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O $\angle A_1 = \frac{a_n}{2} = \frac{n-2}{2n} \cdot 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}$. Следовательно,

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R \cos \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) = 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$r = OH_1 = R \sin \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right) = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Используя формулы (2) и (3), докажите, что

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

Полагая в формуле (2) n равным 3, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_3 = 2R \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R \sqrt{3}; \quad (4)$$

$$a_4 = 2R \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \sin 45^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R \sqrt{2}; \quad (5)$$

$$a_6 = 2R \sin \frac{180^\circ}{6} = 2R \sin 30^\circ = 2R \cdot \frac{1}{2} = R. \quad (6)$$

13.5. Задачи построения с помощью циркуля и линейки правильного треугольника и четырехугольника (квадрата) были решены ранее, и они довольно просты. Формула (6) позволяет легко решить следующую задачу.

Задача 1. Постройте правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, сторона которого равна данному отрезку k .

Указание. 1) Выбрав произвольную точку O , построим окружность $\omega(O, k)$. Выберем на ней точку A_1 .

1) $A_2A_6 = \omega(O, k) \cap \omega(A_1, k)$.

2) $A_3 = \omega(O, k) \cap \omega(A_2, k)$.

3) $A_4 = \omega(O, k) \cap \omega(A_3, k)$.

4) $A_5 = \omega(O, k) \cap \omega(A_4, k)$.

Последовательно соединяя отрезками построенные точки, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

Для построения правильных многоугольников часто используется следующая задача:

Задача 2. Дан правильный n -угольник. Постройте правильный $2n$ -угольник.

Указание. Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный n -угольник. Опишем около него окружность.

Для решения задачи достаточно разделить дуги $A_1A_2, A_2A_3...A_nA_1$ пополам и каждую из точек деления $B_1, B_2, ..., B_n$ соединить отрезками с концами соответствующей дуги. Для построения точек $B_1, B_2, ..., B_n$ можно воспользоваться серединными перпендикулярами к сторонам n -угольника.

На рисунке 63 таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1B_1A_2B_2...A_6B_6$.

Применяя указанный способ, можно с помощью циркуля и линейки построить целый ряд правильных многоугольников, если построен один из них. Например, построив правильный четырехугольник, то есть квадрат, и пользуясь задачей 2, можно построить правильный восьмиугольник, затем

правильный шестнадцатиугольник и вообще правильный $2n$ -угольник, где n — любое целое число больше двух.

Рассмотренные примеры показывают, что многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Оказывается, однако, что не все правильные многоугольники допускают такое построение. Доказано, например, что правильный семиугольник не

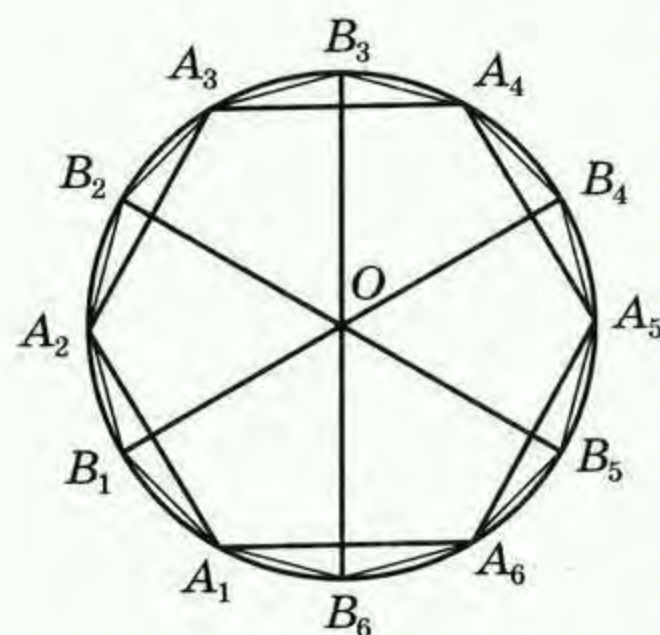


Рис. 63

может быть построен при помощи циркуля и линейки. Однако с помощью этих инструментов можно построить правильный семнадцатиугольник.



1. Что называют правильным многоугольником?
2. Чему равен угол правильного n -угольника?
3. Какую окружность называют описанной около правильного многоугольника?
4. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.
5. Какую окружность называют вписанной в правильный многоугольник?
6. Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.
7. Через какие точки сторон правильного многоугольника проходит вписанная в него окружность?
8. Что вы можете сказать о взаимном расположении центров вписанной в правильный многоугольник окружности и окружности, описанной около него?
9. Какую точку называют центром правильного многоугольника?
10. Как выражается площадь правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности?
11. Какие зависимости существуют между стороной правильного многоугольника и радиусами вписанной и описанной окружностей?
12. Какая зависимость существует между стороной и радиусом описанной окружности для правильных треугольников, четырехугольников и шестиугольников?
13. Как построить с помощью циркуля и линейки правильный шестиугольник?
14. Как построить с помощью циркуля и линейки правильный $2n$ -угольник, если построен правильный n -угольник?
15. Докажите, что любой правильный четырехугольник является квадратом.
16. По рисунку 64 (а, б, в) найдите количество сторон многоугольника.

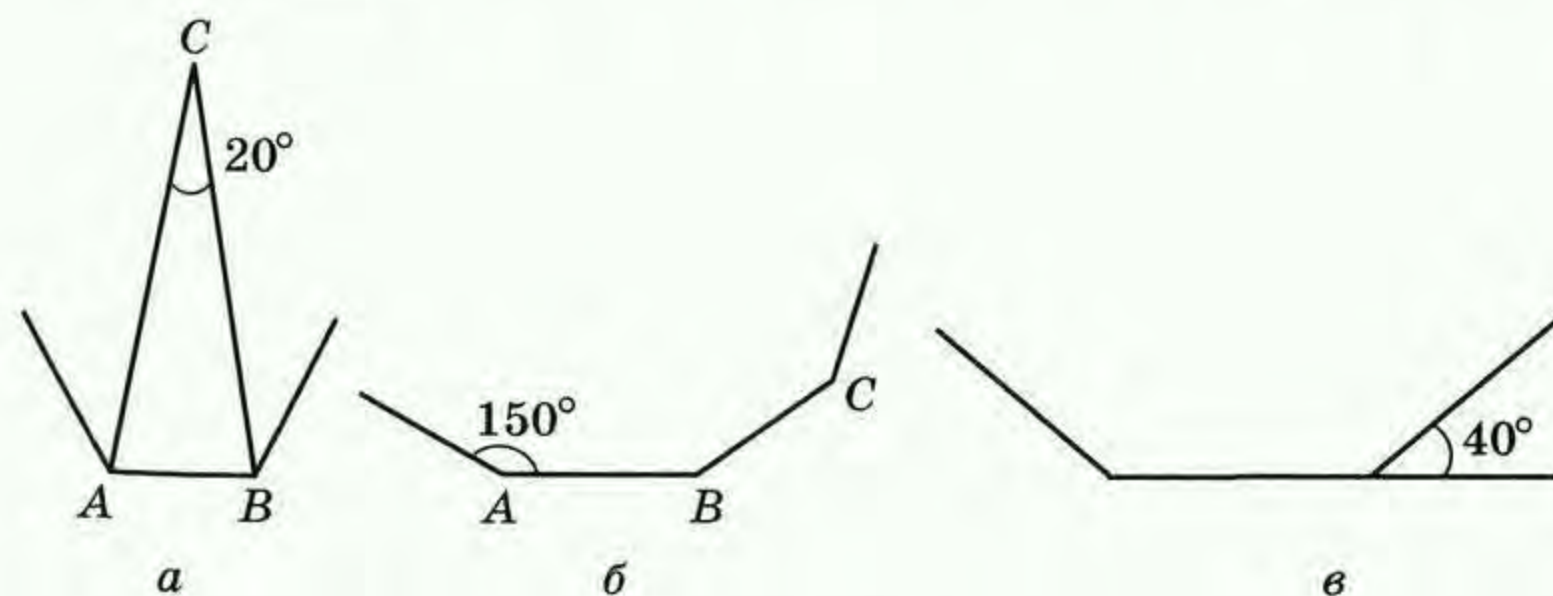


Рис. 64

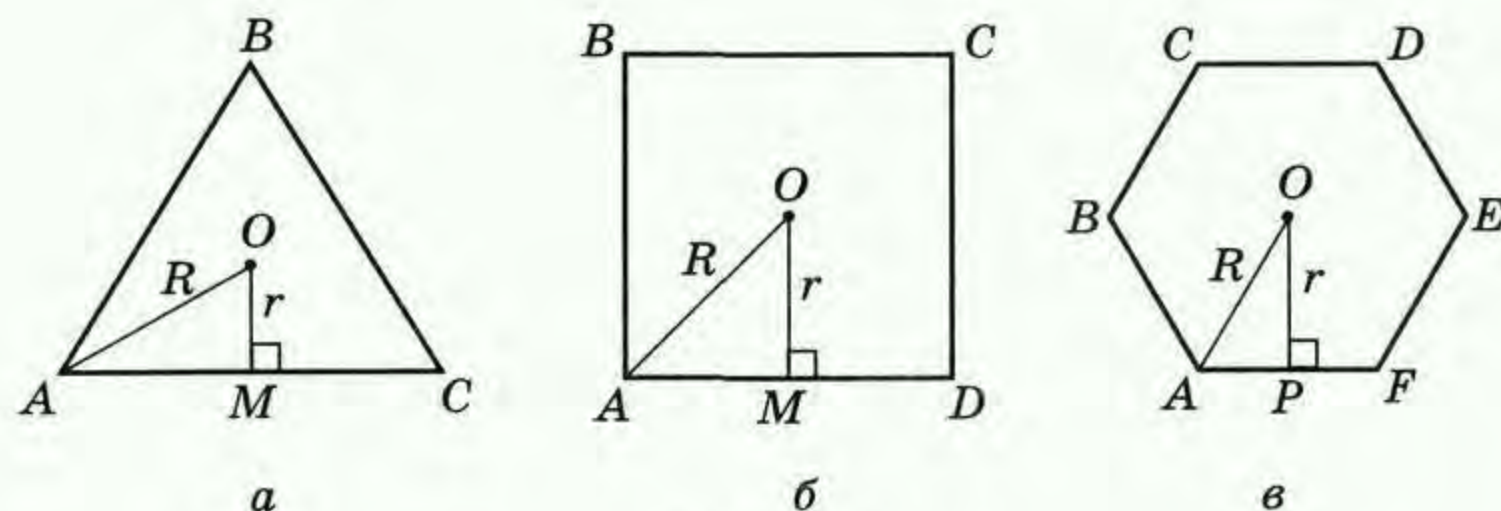


Рис. 65

17. По рисунку 65 (а, б, в) найдите: а) r , если $R = 5$ см; б) R , если $r = 2$ см.

18. Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.

19. Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) треугольник является правильным, если все его углы равны; в) любой равносторонний треугольник является правильным; г) любой четырехугольник с равными сторонами является правильным? Ответ обоснуйте.

20. Будет ли вписанный равносторонний многоугольник правильным? Чему равен наименьший внутренний угол правильного многоугольника?

21. Верно ли утверждение, что два правильных одноименных многоугольника подобны?

22. Верно ли утверждение, что выпуклый многоугольник будет правильным, если он вписывается в окружность и его углы равны между собой?



370. Найдите углы правильного n -угольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 10$; д) $n = 18$.

371. Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна: а) 60° ; б) 30° ; в) 90° ; г) 36° ; д) 18° ; е) 72° ?

372. Сторона правильного многоугольника вдвое больше расстояния от центра этого многоугольника до стороны. Сколько сторон имеет этот многоугольник?

373. Как относятся стороны и площади вписанного в окружность и описанного около этой же окружности правильных треугольников?

374. Найдите площадь правильного шестиугольника, если сторона его равна 10 м.

375. Найдите площадь правильного треугольника, если радиус описанного круга равен 12 дм.

376. Периметр правильного шестиугольника равен 120 см. Вычислите диаметр описанной окружности.

377. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника параллельны его соответствующим сторонам.

378. Поперечное сечение деревянного бруска является квадратом со стороной 6 см. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из этого бруска.

379. Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см.

380. Найдите площадь S правильного n -угольника, если а) $n = 4$; $R = 3\sqrt{2}$ см; б) $n = 3$, $P = 24$ см; в) $n = 6$, $r = 9$ см; г) $n = 8$, $r = 5\sqrt{3}$ см.

381. Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

382. Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около нее.

383. Правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$ вписан в окружность радиуса R . Докажите, что четырехугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником, и выразите его площадь через R .

384. С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите: а) правильный шестиугольник; б) правильный треугольник; в) квадрат; г) правильный восьмиугольник.



385. Чему должен быть равен наименьший диаметр круга, из которого требуется вырезать квадрат со стороной 10 см?

386. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности, описанной около правильного шестиугольника, до его вершин есть величина постоянная.

387. Из каких одинаковых плит, имеющих форму правильных многоугольников, можно настелить паркетный пол?

388. Можно ли настелить пол из паркета в форме квадратов и таких правильных многоугольников, стороны которых равны стороне квадрата?

389. Докажите, что середины сторон правильного n -угольника являются вершинами другого правильного n -угольника.

390. Пятиугольник имеет две оси симметрии. Докажите, что он правильный.

391. Правильный треугольник повернут около своего центра на угол α ($\alpha < 120^\circ$). Докажите, что шесть сторон обоих треугольников образуют в пересечении равносторонний шестиугольник.

392. В окружность радиуса R вписан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2\dots A_{12}$. Вычислите: а) площадь треугольника $A_1A_2A_3$; б) площадь четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$; в) площадь пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

393. В треугольнике ABC $\angle A = 120^\circ$, $AB = AC = 1$ см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

§ 14. Длина окружности

14.1. Что такое длина окружности? Представим себе, что окружность сделана из тонкой проволоки. Если мы разрежем проволоку и распрямим, то получим некоторый отрезок AA_1 , длина которого и есть *длина окружности* (рис. 66).

Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Рассмотрим вписанные в окружность квадрат, правильные восьмиугольник, шестнадцатиугольник (рис. 67). Заметим, что, чем больше мы удваиваем число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон все ближе

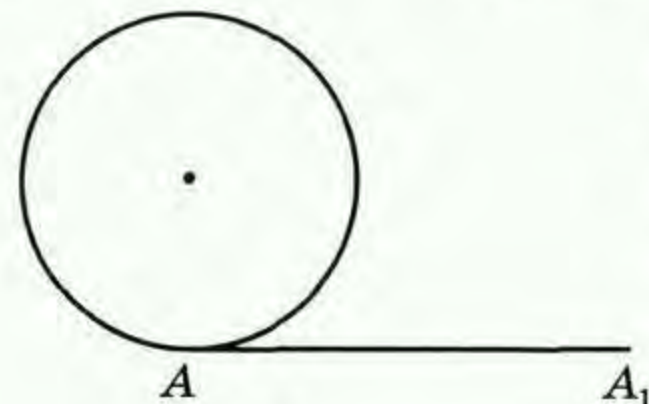


Рис. 66

и ближе «прилегает» к окружности. Точное значение длины окружности — это есть то число, к которому приближаются периметры правильных вписанных в окружность многоугольников при неограниченном увеличении числа их сторон.

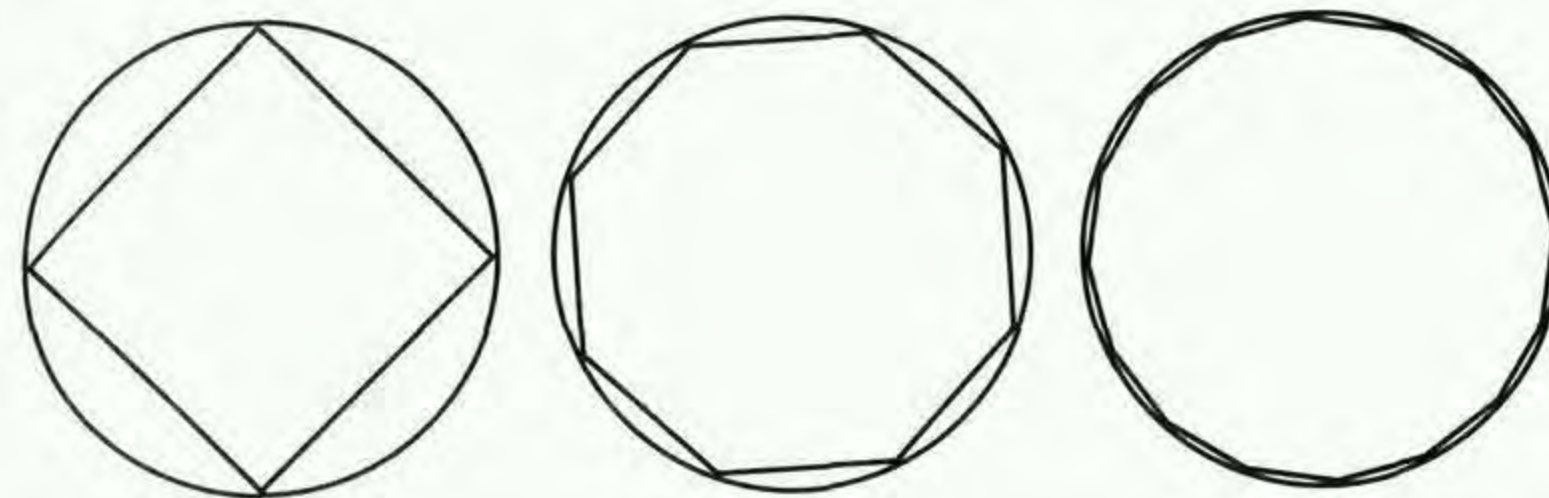


Рис. 67

14.2. Теорема (об отношении длины окружности к ее диаметру). *Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.*

Дано: Окружности ω (O, R) и ω' (O', R'), C и C' — их длины, D и D' — их диаметры.

Доказать: $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, где $2R = D$, $2R' = D'$.

Пояснение к теореме. Впишем в каждую из окружностей правильный n -угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и a'_n — стороны этих многоугольников.

1) Используя формулу (2) из § 13, получаем:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \quad (1)$$

2) Это равенство справедливо при любом значении n . Будем теперь неограниченно удваивать число сторон n многоугольников. При этом P_n будет неограниченно приближаться к C , а P'_n неограниченно приближаться к C' . Следовательно, предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ будет равен $\frac{C}{C'}$.

3) С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Из этого равенства следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, то есть отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей. Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

14.3. Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получается формула для вычисления длины окружности радиуса R : $C = 2\pi R$.

Доказано, что число π нельзя записать в виде конечной десятичной дроби или дроби вида $\frac{a}{b}$, где a и b — некоторые натуральные числа. Это так называемое иррациональное число. Дробь $\frac{22}{7}$ является приближенным значением числа π с точностью до 0,002. Это приближенное значение было найдено еще в III в. до н. э. великим греческим ученым Архимедом. При решении задач будем пользоваться приближенным значением π с точностью до 0,01 и считать, что $\pi \approx 3,14$.

14.4. Выведем теперь формулу для вычисления длины дуги окружности с градусной мерой α . Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина дуги окружности выражается формулой $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$.

14.5. Задача. Как изменится длина дуги окружности, если соответствующий ей центральный угол увеличить в два раза?

Дано: $\omega(O, R)$, α_1 , α_2 — центральные углы, $\alpha_2 = 2\alpha_1$.

Сравните l_1 и l_2 .

Решение.

$$1) l_1 = \frac{\pi R \alpha_1}{180}; l_2 = \frac{\pi R \alpha_2}{180} = \frac{\pi R \cdot 2\alpha_1}{180} = \frac{\pi R \alpha_1}{90}.$$

$$2) \frac{l_2}{l_1} = \frac{\pi R \alpha_1}{180} : \frac{\pi R \alpha_1}{90} = 2.$$

Ответ: увеличится в 2 раза.



1. Как можно представить себе длину окружности?
2. Сформулируйте и докажите теорему об отношении длины окружности к ее диаметру.
3. Что такое число π ? Чему оно приближенно равно?
4. Запишите формулу для вычисления длины окружности.
5. Найдите длину окружности, если радиус окружности равен 14 см, $\pi \approx 3$.
6. Длина окружности равна 66. Найдите радиус окружности, если $\pi \approx 3$.
7. Чему равна длина дуги окружности с градусной величиной α ?
8. Радиус окружности равен 21. Найдите длину окружности с градусной величиной, равной 60° ($\pi \approx 3$).



394. Перечертите таблицу и, используя формулу длины C окружности радиуса R , заполните пустые клетки.

C			48	20π				$3\sqrt{2}$
R	14	7			0,4	8,5	$3\frac{1}{5}$	

395. Найдите длину окружности, если диагональ вписанного в нее квадрата равна 10 см.

396. Диаметр чугунной трубы равен 50 мм. Найдите длину окружности трубы.

397. Длина окружности равна π дм. Найдите радиус окружности.

398. Длина окружности равна 10π м. Найдите ее диаметр.

399. На сколько увеличится длина окружности, если ее радиус увеличится на 1 см?

400. Длина одной окружности равна диаметру другой. Найдите отношение их радиусов.

401. В квадрат со стороной 20 см вписана окружность. На сколько периметр квадрата больше длины окружности?

402. На протяжении 3,14 км колесо тепловоза сделало 500 оборотов. Как велик радиус колеса?

403. На сколько увеличится диаметр окружности, если длину окружности увеличить на 2 м?

404. Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в три раза; б) уменьшить в два раза; в) увеличить в k раз; г) уменьшить в k раз?

405. Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

406. Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника со стороной m ; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b ; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b ; г) прямоугольника со стороной p и острым углом α между диагоналями; д) правильного шестиугольника, площадь которого равна $24\sqrt{3}$ см².

407. Найдите длину окружности, вписанной в: а) квадрат со стороной a ; б) равнобедренный прямоугольный треуголь-

ник с гипотенузой c ; в) прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α ; г) равнобедренный треугольник с углом при основании α и высотой h , проведенной к основанию.

408. Тепловоз прошел 2826 м. Найдите диаметр колеса тепловоза, если известно, что оно сделало 600 оборотов.

409. Метр составляет приблизительно $\frac{1}{40000000}$ часть земного экватора. Найдите в километрах диаметр Земли, считая, что она имеет форму шара.

410. Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, если спутник вращается на расстоянии 300 км от Земли, а радиус Земли равен 6370 км.

411. Найдите длину дуги окружности радиуса 12 см, если ее градусная величина равна: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ; г) 90° .

412. Расстояние между серединами зубьев зубчатого колеса, измеренное по дуге окружности, равно 31,4 мм. Диаметр колеса равен 300 мм. Сколько зубьев имеет колесо?

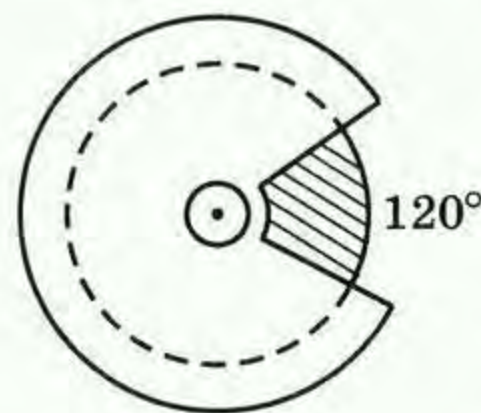


Рис. 68

413. Шлифовальный камень, имеющий форму диска, находится в защитном кожухе (рис. 68). Диаметр камня равен 60 см, дуга незащищенной его части равна 120° . Найдите длину дуги незащищенной части камня.

414. Найдите длину маятника стальных часов, если угол его колебания составляет 30° , а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 20 см.

415. Радиус закругления пути железнодорожного полотна равен 6 км, а длина дуги закругления — 628 м. Какова градусная величина дуги закругления?



416. Найдите толщину стенки металлической трубки, внешняя окружность которой имеет длину 6,28 дм, а внутренняя 3,14 дм.

417. Около окружности описана равнобедренная трапеция с углом, равным 30° . Средняя линия ее равна 2 см. Найдите длину окружности.

418. а) Радиус глобуса увеличили на 1 см. На сколько увеличится длина его экватора? б) На сколько увеличилась бы длина земного экватора при том же увеличении земного радиуса?

419. Длина минутной стрелки будильника равна 5 см. Какой путь проходит стрелка за 10 минут? (Дайте ответ с точностью до 1 см.)

420. Какой путь между концами дуги сектора короче: по дуге или по радиусам, если угол между радиусами сектора равен: а) 60° ; б) 120° ?

421. Окружность, длина которой $2\pi R$, разогнута в дугу радиуса $4R$. Найдите получившийся центральный угол.

§ 15. Площадь круга

15.1. Вспомним, что **кругом** называют часть плоскости, ограниченную окружностью и находящуюся внутри нее. Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии не больше R .

Выведем формулу для вычисления площади круга радиуса R . Для этого рассмотрим правильный n -угольник $A_1A_2\dots A_n$, вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 69). Очевидно, площадь S данного круга больше площади S_n многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, так как этот многоугольник целиком содержится в данном круге. С другой стороны, площадь S'_n круга, вписанного в многоугольник, меньше S_n , так как этот круг целиком содержится в многоугольнике. Итак, $S'_n < S_n < S$.

Будем теперь неограниченно удваивать число сторон многоугольника. По формуле (3) § 13

имеем $r_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$, где r_n — радиус вписанной в многоугольник окружности. При неограниченном удваивании числа сторон n число $\frac{180^\circ}{n}$ будет стремиться к нулю, сле-

довательно, $\cos \frac{180^\circ}{n}$ будет стремиться к единице, поэтому r_n будет стремиться к R . Иными словами, при не-

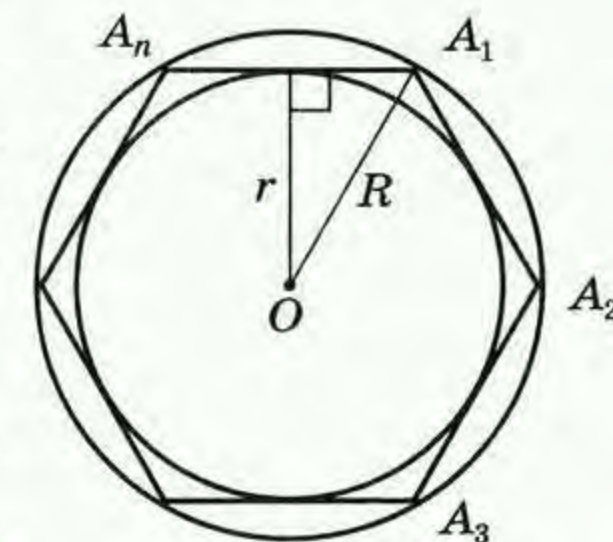


Рис. 69

ограниченном удваивании числа сторон многоугольника вписанная в него окружность «стремится» к описанной окружности, поэтому S'_n неограниченно приближается к S . Отсюда и из неравенств $S'_n < S_n < S$ следует, что S_n стремится к S при неограниченном удваивании числа сторон n .

По формуле (1) § 13 $S_n = \frac{1}{2} P_n r_n$, где P_n — периметр многоугольника $A_1 A_2 \dots A_n$. Учитывая, что r_n стремится к R , P_n стремится к $2\pi R$, а S_n стремится к S при неограниченном удваивании числа сторон n , получаем $S = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Итак, **формула для вычисления площади S круга радиуса R имеет вид: $S = \pi R^2$.**

Примечание. В течение веков усилия многих математиков были направлены на решение задачи, получившей название «задача о квадратуре круга»: построить при помощи циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга. Только в конце прошлого века было доказано, что такое построение невозможно.

15.2. Круговым сектором или просто **сектором** называют часть круга, ограниченную дугой и двумя радиусами, проведенными в концы дуги. Дугу, которая ограничивает сектор, называют **дугой сектора**. На рисунке 70, а изображены два сектора с дугами ALB и AMB . Первый из этих секторов заштрихован.

Выведем формулу для вычисления площади S кругового сектора радиуса R , ограниченного дугой с градусной мерой α . Так как площадь всего круга равна πR^2 , то площадь кругового

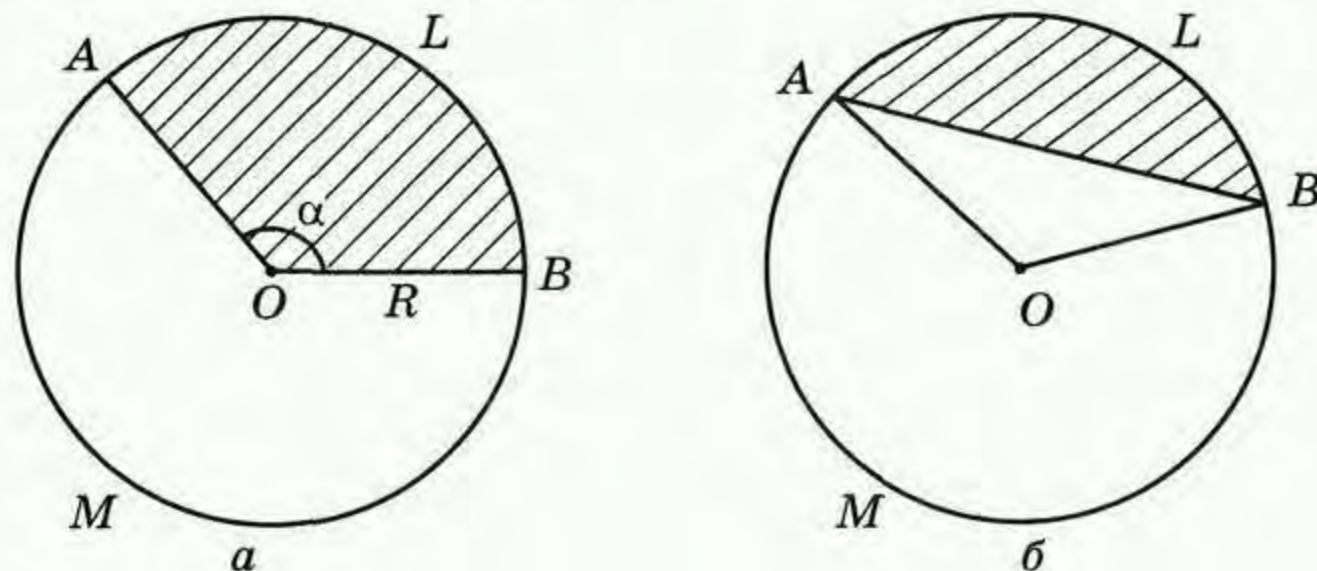


Рис. 70

сектора, ограниченного дугой в 1° , равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому **площадь S сектора** выражается формулой $S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$.

15.3. Задача 1. Как изменится площадь сектора окружности, если соответствующий ему центральный угол уменьшить в два раза?

Дано: $\omega(O, R)$, α_1, α_2 — центральные углы, $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Сравните S_1 и S_2 .

Решение.

$$1) S_2 = \frac{\pi R^2 \alpha_2}{360}; S_1 = \frac{\pi R^2 \alpha_1}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot 2\alpha_2}{360} = \frac{\pi R^2 \alpha_2}{180}.$$

$$2) \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2 \alpha_2}{180} : \frac{\pi R^2 \alpha_2}{360} = 2.$$

О т в е т: уменьшится в 2 раза.

Задача 2. Докажите, что площадь сектора можно найти по формуле $S = \frac{1}{2} lR$, где l — длина дуги окружности этого сектора.

Дано: $\omega(O, R)$, l — длина дуги, ограничивающей сектор.

Доказать: $S = \frac{1}{2} lR$.

Доказательство.

$$1) S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha; l = \frac{\pi R \alpha}{180}.$$

$$2) R = \frac{180 \cdot l}{\pi \alpha}.$$

$$3) S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot R = \frac{\pi R l}{360} \cdot \frac{180 \cdot l}{\pi \alpha} = \frac{1}{2} lR.$$

15.4*. Круговым сегментом, или просто **сегментом** называют часть круга, ограниченную дугой и стягивающей ее хордой. На рисунке 70, б изображены два сегмента с дугами ALB и AMB . Один из них заштрихован.

Докажите, используя рисунок 70, б, что **площадь сегмента** можно найти по формуле $S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \pm S_{\triangle AOB}$.



1. Что называют кругом?
2. Запишите формулу для вычисления площади круга. Выведите ее.
3. Чему равна площадь круга, если его радиус равен 10 см?
4. Чему равна площадь круга, если его диаметр равен 10 см?
5. Что называют круговым сектором?

6. Запишите формулу для вычисления площади кругового сектора, ограниченного дугой с градусной мерой, равной α .
7. Радиус окружности равен шести. Вычислите площадь кругового сектора, ограниченного дугой с градусной мерой, равной 120° .



422. Перечертите таблицу и, используя формулу для площади S круга радиуса R , заполните пустые клетки.

S			16		64π			6,25
R	0,2	15		$\frac{2}{17}$		54,3	$2\sqrt{3}$	

423. Длина окружности равна 6,28 дм. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью.

424. Найдите площадь круга, если площадь вписанного в этот круг квадрата равна 400 см^2 .

425. Найдите площадь вписанного квадрата, если площадь круга равна $4\pi \text{ дм}^2$.

426. Площадь круга равна π квадратным единицам. Найдите длину окружности, ограничивающей этот круг.

427. Найдите длину окружности, если площадь круга, ограниченного ею, равна 1 м^2 .

428. Около правильного треугольника, сторона которого равна a , описана окружность, и в тот же треугольник вписана окружность. Найдите площадь кольца, заключенного между этими окружностями.

429. Вычислите площадь поперечного сечения трубы городского водопровода, имеющего внутренний диаметр 600 мм.

430. На сколько увеличится площадь круга радиуса R , если радиус увеличится на 1?



431. Найдите зависимость между площадями кругов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах.

432. Как изменится площадь круга, если радиус его увеличить в m раз?

433. Во сколько раз, при одинаковой скорости течения, через трубу диаметром в 15 см протекает воды больше, чем через трубу диаметром в 6 см?

434. Как изменится площадь круга, если: а) радиус увеличить в 1,5 раза; б) радиус уменьшить в 2 раза; в) радиус увеличить на 200 %; г) радиус уменьшить на 75 %?

435. Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

436. Найдите площадь круга, описанного около: а) прямоугольника со сторонами x и y ; б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α ; в) равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h , проведенной к основанию.

437. Найдите площадь круга, вписанного: а) в равносторонний треугольник со стороной a ; б) в прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом β ; в) в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α , противолежащим основанию.

438. Диаметр основания Царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6 м. Найдите площадь основания колокола.

439. Длина окружности цирковой арены равна 31,4 м. Найдите диаметр и площадь арены.

440. Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2 , $R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, если $R_1 = 1,5 \text{ см}$, $R_2 = 2,5 \text{ см}$.

441. Какой толщины слой нужно снять с круглой проволоки, имеющей площадь сечения $78,5 \text{ мм}^2$, чтобы она проходила сквозь отверстие диаметром 11,2 мм?

442. Вокруг круглой клумбы, радиус которой равен 4 м, проложена дорожка шириной 1 м. Сколько нужно песка, чтобы посыпать дорожку, если на 1 м^2 дорожки требуется $0,8 \text{ дм}^3$ песка?

443. Из круга радиуса r вырезан равносторонний треугольник, вписанный в окружность, которая ограничивает круг. Найдите площадь оставшейся части круга.

444. На мишени имеются четыре окружности с общим центром, радиусы которых равны 1, 2, 3 и 4. Найдите площадь наименьшего круга, а также площадь каждого из трех колец мишени.

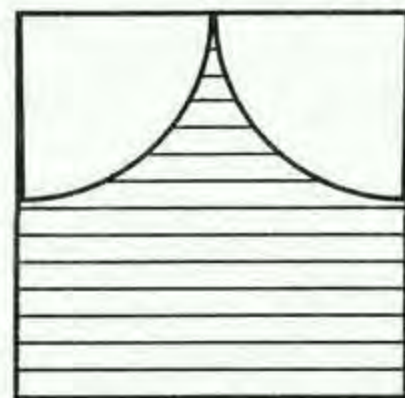


Рис. 71

445. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

446. Из круга, радиус которого 6 см, вырезан сектор с дугой в 60° . Найдите площадь оставшейся части круга.

447. Площадь сектора с центральным углом 144° равна S . Найдите радиус сектора.

448. Сторона квадрата на рисунке 71 равна a . Вычислите площадь заштрихованной фигуры.

449. Арена цирка имеет форму круга, диаметр которого равен 100 м. Проход в форме сектора занимает по окружности 6° . Найдите площадь, занятую проходом.



450. Две трубы, диаметры которых известны, надо заменить одной трубой той же пропускной способности. Диаметр такой трубы находится при помощи плотничьего наугольника, как показано на рисунке 72. Объясните, как используется этот инструмент. Найдите диаметр трубы по размерам, данным на рисунке.

451. В правильный треугольник вписана окружность. Площадь ограниченного ею круга равна 1 см^2 . Около этого треугольника описана окружность. Найдите площадь кольца, ограниченного вписанной и описанной окружностями.

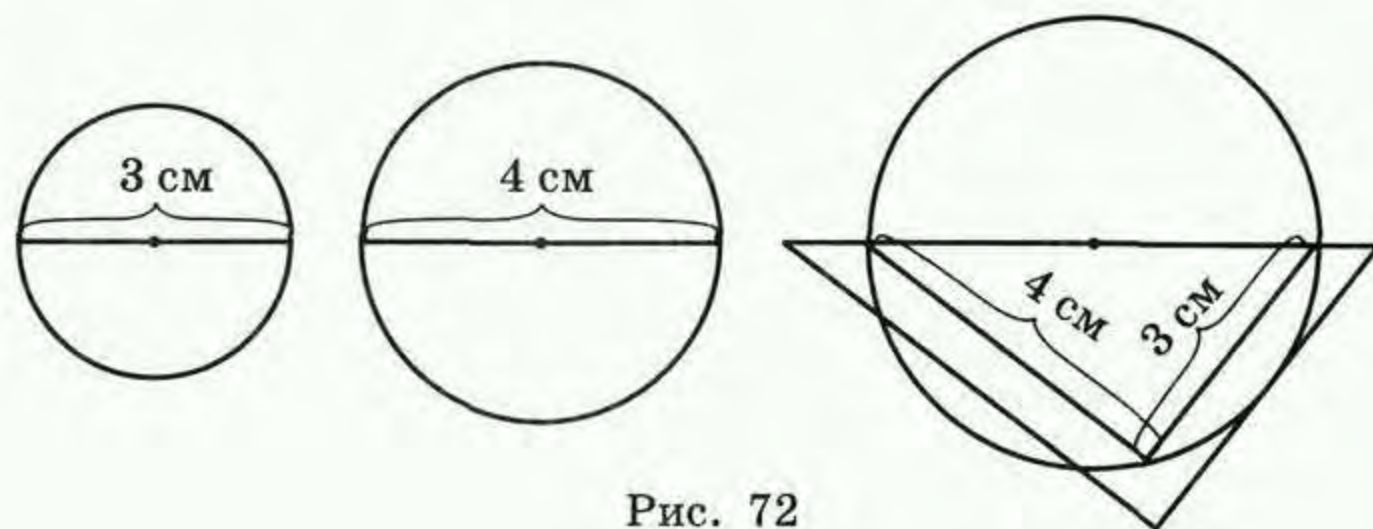


Рис. 72

452. В полукруг с диаметром $AB = 2 \text{ см}$ вписан равнобедренный треугольник (рис. 73). Найдите площадь заштрихованной части.

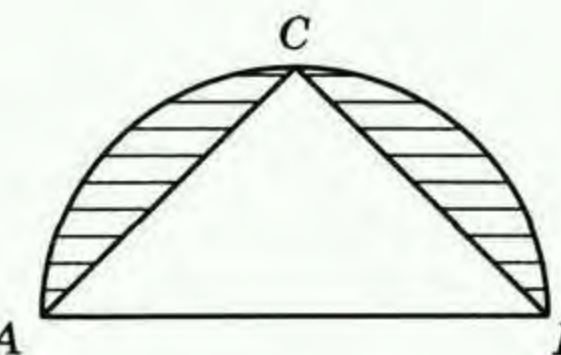


Рис. 73

Задачи к главе IV



453. Докажите, что серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

454. Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

455. На рисунке 74 изображен квадрат, вписанный в окружность радиуса R . Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

№	R	r	a_4	P	S
1			14		
2		3			
3	5				
4				32	
5					64

456. На рисунке 75 изображен правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R . Перечертите таблицу в

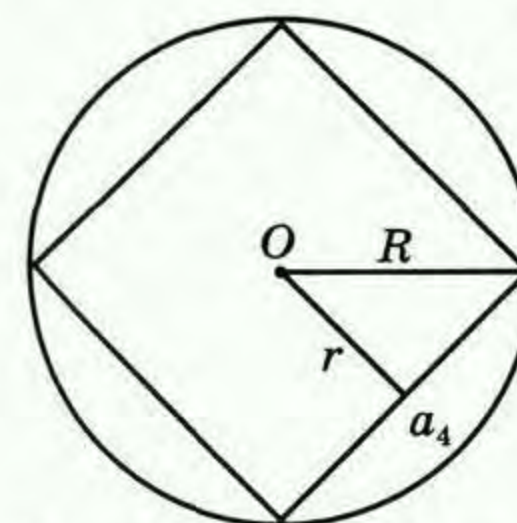


Рис. 74

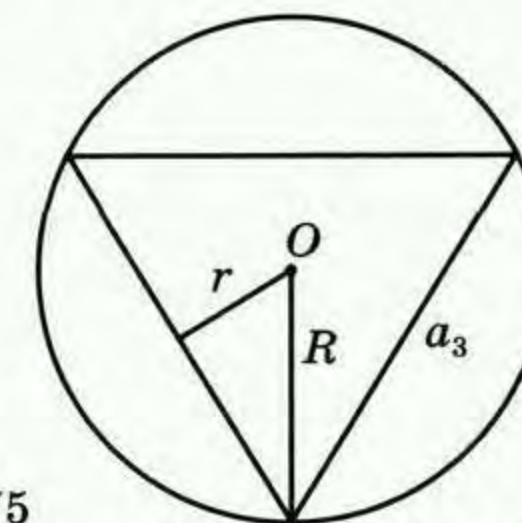


Рис. 75

тетрадь и заполните пустые клетки (a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

№	R	r	a_3	P	S
1	5				
2					$16\sqrt{3}$
3		4			
4			6		
5				9	

457. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 27 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

458. Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного шестиугольника, сторона которого равна 2 см. Каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого изготавливают вентиль?

459. Около правильного треугольника описана окружность радиуса R . Докажите, что $R = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

460. Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, верхнее основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь верхнего основания.

461. Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус вписанной окружности; б) через радиус описанной окружности.

462. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен: а) 18° ; б) 40° ; в) 72° ; г) 60° ?

463. На стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 3 дм, построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

464. Найдите периметр правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, если $A_1A_4 = 2,24$ см.

465. Найдите отношение периметров правильного треугольника и квадрата: а) вписанных в одну и ту же окружность; б) описанных около одной и той же окружности.

466. Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2 \dots A_{10}$, вписанного в окружность радиуса R , пересекаются в точке B (рис. 76). Докажите, что: а) $A_2A_7 = 2R$; б) A_1A_2B и BA_4O — подобные равнобедренные треугольники.

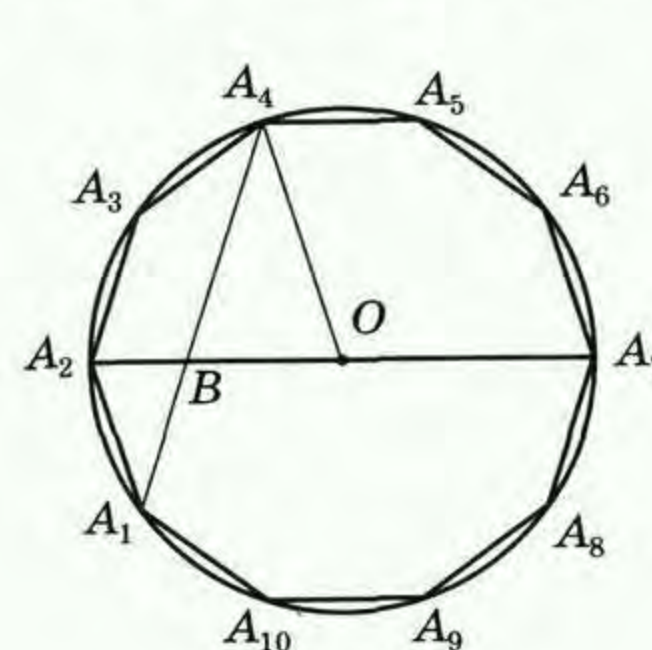


Рис. 76

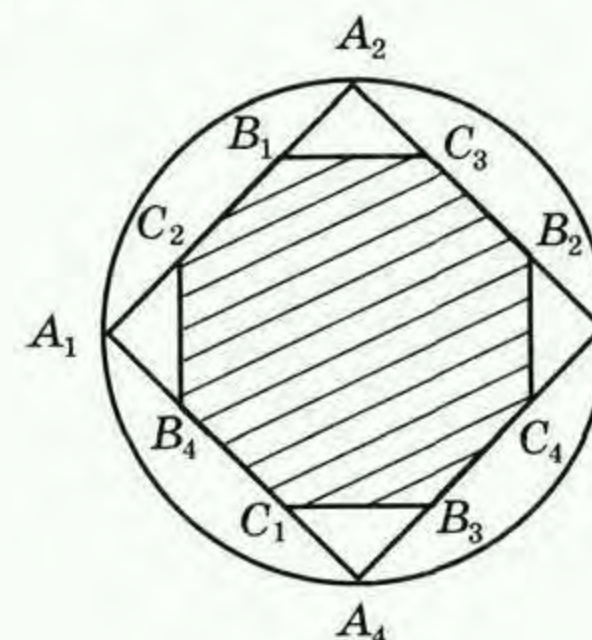


Рис. 77

467. В круг, площадь которого равна 81π см², вписан правильный шестиугольник. Найдите сторону этого шестиугольника и его площадь.

468. Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность радиуса R (рис. 77). На его сторонах отмечены восемь точек так, что $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = A_4C_4 = R$. Докажите, что восьмиугольник $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ правильный, и выразите площадь этого восьмиугольника через радиус R .

469. За три оборота по круговой орбите вокруг Земли космический корабль проделал путь в 126 228 км. На какой высоте над поверхностью Земли находится корабль, если радиус Земли равен 6370 км?

470. Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если: а) диагонали ромба равны 12 см и 16 см; б) сторона ромба равна a и острый угол равен α .

471. Лесной участок имеет форму круга. Чтобы обойти этот участок по опушке, идя со скоростью 4 км/ч, нужно за-

тратить на 30 мин больше, чем для того, чтобы пересечь его по диаметру. Найдите длину опушки данного участка.

472. В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.

473. Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

474. Даны два круга. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

475. Около данной окружности опишите: а) правильный треугольник; б) правильный шестиугольник.

476. Около данной окружности опишите: а) правильный четырехугольник; б) правильный восьмиугольник.

477. Может ли вписанный многоугольник иметь: а) равные углы, но неравные стороны; б) равные стороны, но неравные углы?

478. Сторона вписанного квадрата равна a . Найдите сторону описанного вокруг той же окружности квадрата.

479. У какого правильного многоугольника центральный угол его равен внутреннему углу? (Центральный угол многоугольника образован отрезками, соединяющими центр многоугольника с двумя соседними вершинами.)

480. Докажите, что в любом треугольнике сторона, лежащая против угла в 30° , равна радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

481. Найдите сторону квадрата, вписанного в равносторонний треугольник, вписанный в окружность радиуса R , если две вершины квадрата лежат на одной его стороне, а две другие — на остальных сторонах треугольника.

482. Постройте с помощью транспортира правильный девятиугольник.

483. Чему равна длина окружности, если ее радиус равен: а) 5 см; б) 10 см?

484. Длина окружности равна 1 м. Найдите диаметр окружности.

485. Чему равна диагональ вписанного квадрата, если длина окружности равна 7π см?

486. Радиус окружности увеличили на 2 дм. На сколько увеличится длина окружности?

487. Докажите, что центральный угол правильного многоугольника равен его внешнему углу.

488. Найдите сумму внутренних углов правильных: а) восьмиугольника; б) пятинадцатиугольника; в) двадцатиугольника.

489. Найдите сумму внутренних углов правильного многоугольника, если внутренний угол его больше внешнего на: а) 108° ; б) 160° ; в) 150° .

490. Найдите меньшую диагональ правильного шестиугольника, сторона которого равна: а) 12 см; б) $5\sqrt{3}$ см; в) $8\sqrt{6}$ см.

491. Найдите стороны четырехугольника, вершинами которого являются точки касания окружности со сторонами ромба, описанного около нее. Радиус окружности равен r , острый угол ромба 60° .

492. Около окружности радиуса $r = 12$ см описан правильный шестиугольник, на стороне которого построен правильный треугольник. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника, и радиус окружности, вписанной в него.

493. Выведите формулы для вычисления площадей правильных треугольников, четырехугольников и шестиугольников по радиусам описанных вокруг них окружностей.

494. Около круга, радиус которого r , описаны правильный треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Выразите площадь каждого многоугольника через радиус круга.

495. В окружности вписаны правильный треугольник и шестиугольник. Докажите, что площадь шестиугольника вдвое больше площади треугольника.

496. Найдите площадь правильного шестиугольника, меньшая диагональ которого равна 12 см.

497. Расстояние между параллельными сторонами правильного шестиугольника равно 1,8 дм. Найдите площадь шестиугольника.

498. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника, площадь которого равна $12\sqrt{3}$ см².

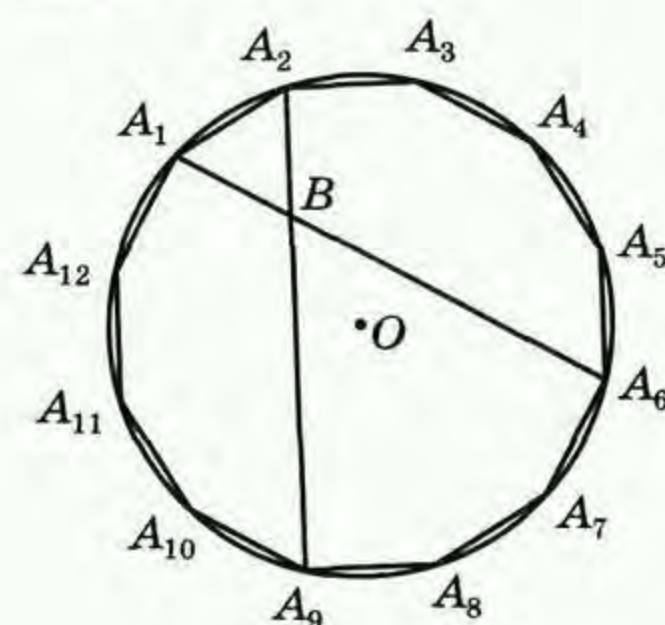


Рис. 78

499. Диагонали A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника пересекаются в точке B (рис. 78). Докажите, что: а) треугольники A_1A_2B и A_6A_9B равносторонние; б) $A_1A_6 = 2r$, где r — радиус вписанной в двенадцатиугольник окружности.

500. Около окружности радиуса $r = 12$ см описан правильный шестиугольник, на стороне которого построен квадрат. Около

квадрата описана окружность, а около нее — правильный треугольник. Найдите сторону треугольника.

501. Около треугольника ABC , угол A которого равен 30° , а сторона AB равна 140 мм, описана окружность. Найдите стороны AC и BC , если радиус окружности равен 49 см.

502. В окружность радиуса $R = 13$ см вписана трапеция, боковая сторона которой равна $7\sqrt{2}$ см, а острый угол при основании равен 45° . Найдите основания трапеции.

503. В окружность вписана трапеция, боковая сторона которой равна 18 см, а острый угол при основании 60° . Найдите основания трапеции, если радиус окружности равен $14\sqrt{3}$ см.

504. В окружность радиуса R вписана трапеция, острый угол которой равен 60° , а диагональ образует с основанием угол в 45° . Найдите боковую сторону и площадь трапеции.

505. В равнобедренный треугольник вписана окружность, радиус которой равен R . Найдите основание треугольника, если отрезок, соединяющий точки касания окружности с боковыми сторонами треугольника, является: а) стороной вписанного в окружность квадрата; б) стороной правильного вписанного шестиугольника.

506. Из точки A окружности радиуса R проведены две хорды, AB и AC , одна из которых является стороной вписанного квадрата, а другая — стороной правильного вписанного треугольника. Найдите расстояние BC .

507. Хорды MB и MC окружности радиуса R являются сторонами правильных вписанных в эту окружность шести-

угольника и квадрата. Через точки B и C проведены касательные к окружности, точку пересечения которых обозначим через A . Найдите отрезки касательных, заключенных между точками пересечения и касания.

508. В окружность вписана трапеция, острый угол которой равен 45° , а угол между диагональю и основанием 30° . Докажите, что боковая сторона этой трапеции есть среднее геометрическое ее оснований.

509. Даны две такие концентрические окружности, что прямая, отсекающая от большей окружности дугу в 120° , отсекает от меньшей дугу в 90° . Докажите, что любая хорда большей окружности, касающаяся меньшей, является стороной квадрата, вписанного в большую окружность.

510. Диаметр AB и хорда CD некоторой окружности пересекаются в точке M так, что отрезок AC является стороной правильного вписанного в эту окружность шестиугольника, а отрезок BD — стороной правильного вписанного треугольника. Найдите отрезки MA и MB , если $CD = 12\sqrt{3}$ см.

511. В окружность вписан треугольник ABC , у которого $AB = 24$ см, $AC = 15$ см и $\angle BAC = 60^\circ$. Из точки A проведен диаметр AD , а точка D соединена отрезками прямых с вершинами B и C . Найдите BD и DC .

512. В окружность вписан треугольник ABC , у которого $AB = 11$ дм, $BC = 13$ дм и $\angle ABC = 60^\circ$. Из вершины B треугольника проведена хорда BD , перпендикулярная стороне AB , и точка D соединена отрезком прямой с точкой C . Найдите BD и CD .

513. Найдите радиус окружности, если площадь правильного описанного около нее шестиугольника больше площади правильного вписанного в нее шестиугольника на $8\sqrt{3}$ см².

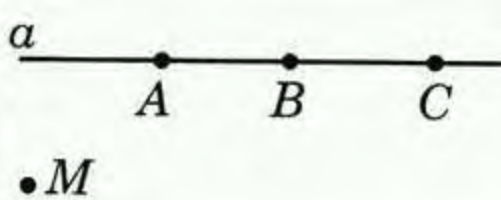
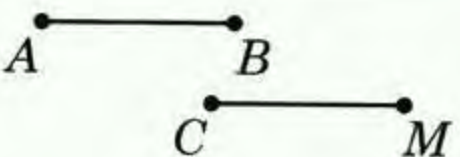
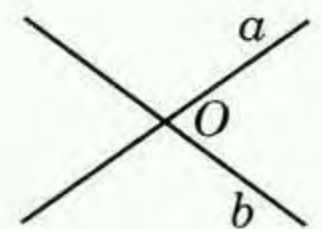
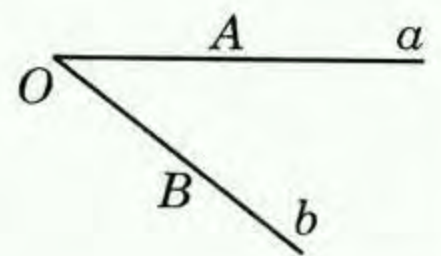
514. Площадь правильного вписанного в окружность треугольника равна $24\sqrt{3}$ см². Найдите площадь правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

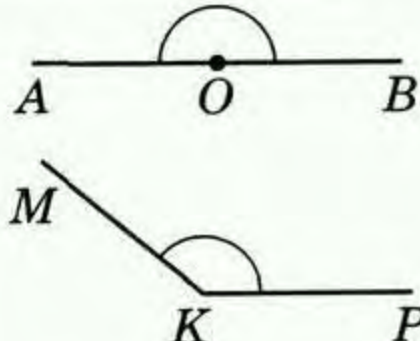
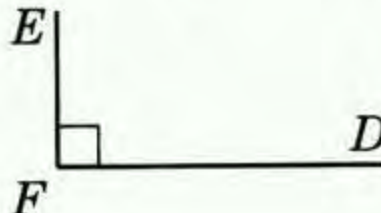
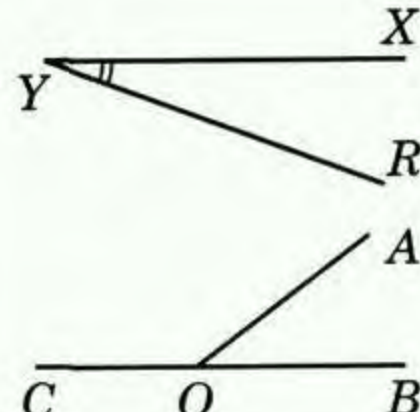
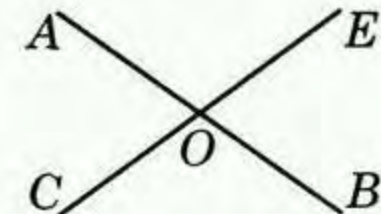
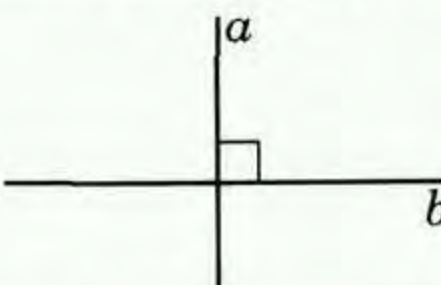
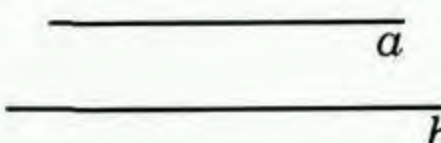
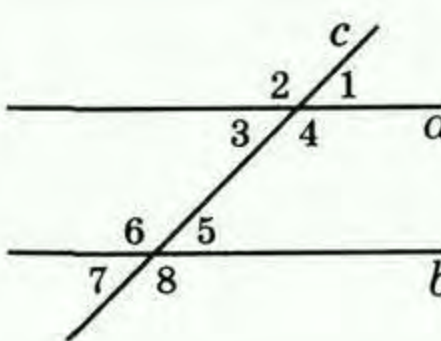
515. Площадь правильного описанного около окружности треугольника равна $108\sqrt{3}$ см². Найдите площадь правильного вписанного в эту окружность шестиугольника.

516. Около окружности радиуса r описан правильный двенадцатиугольник $A_1A_2 \dots A_{12}$. Докажите, что $A_1A_2 + A_1A_4 = 2r$.

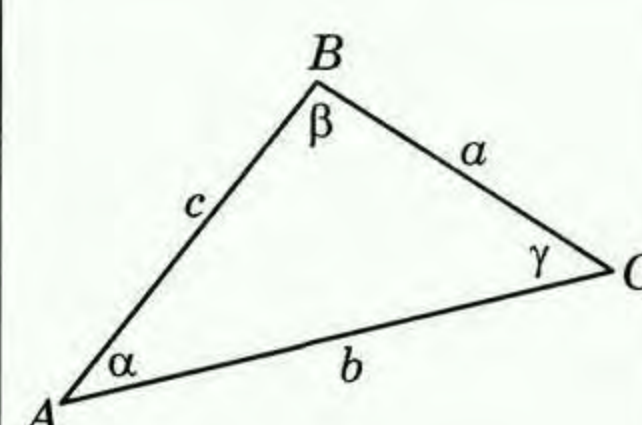
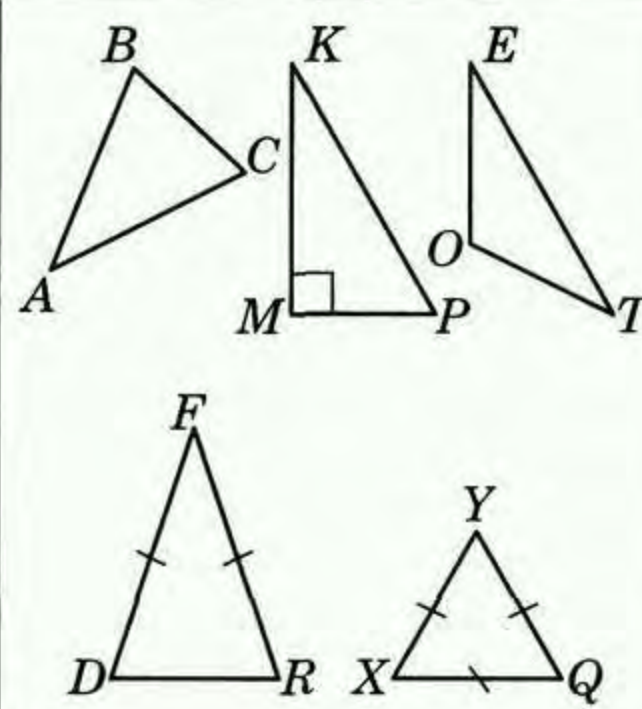
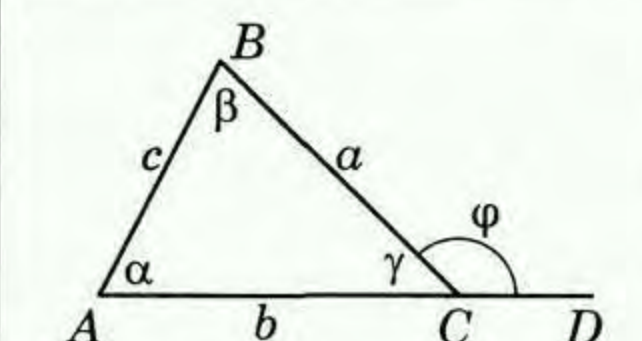
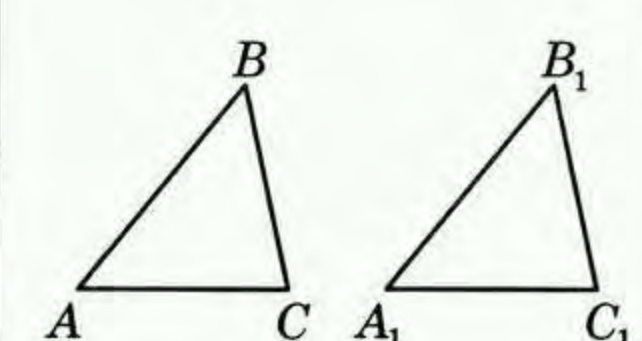
Материал для повторения

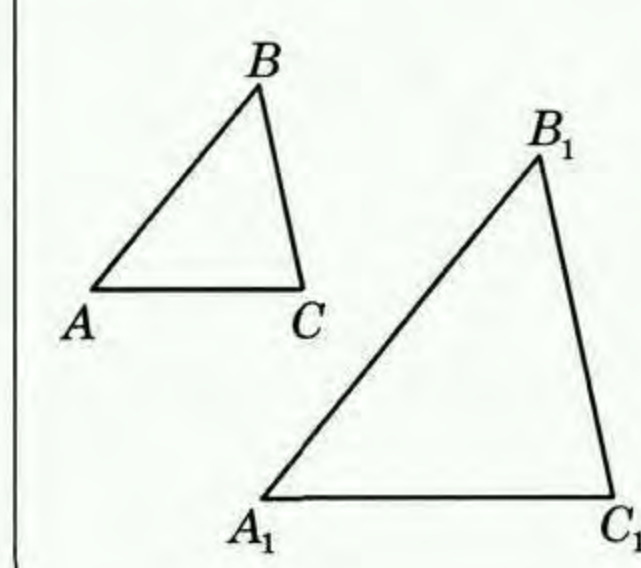
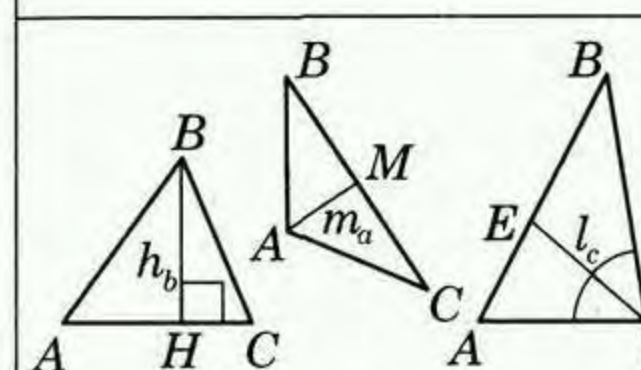
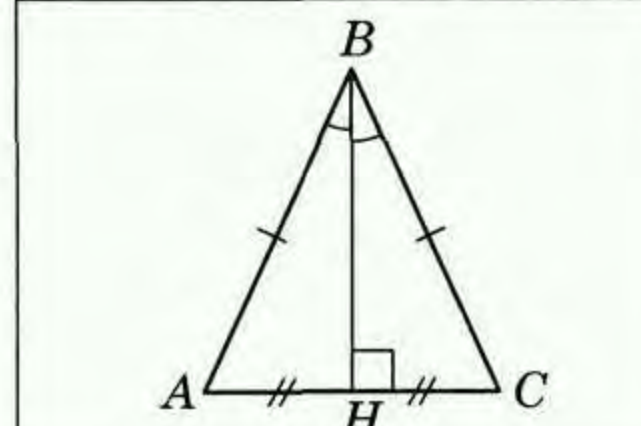
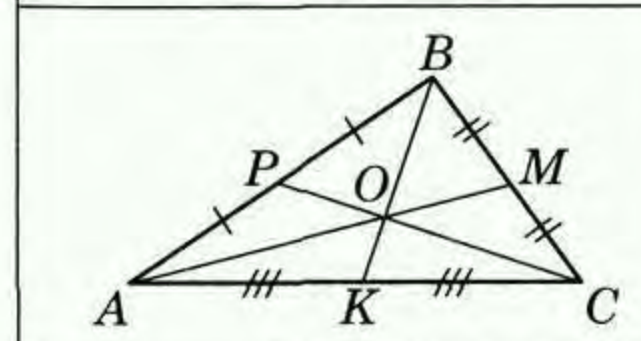
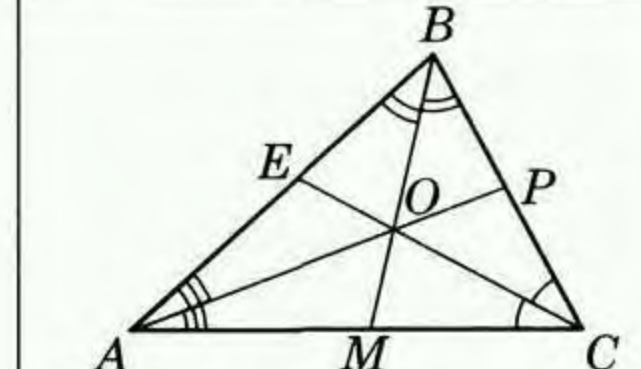
1. Основные понятия. Геометрические фигуры

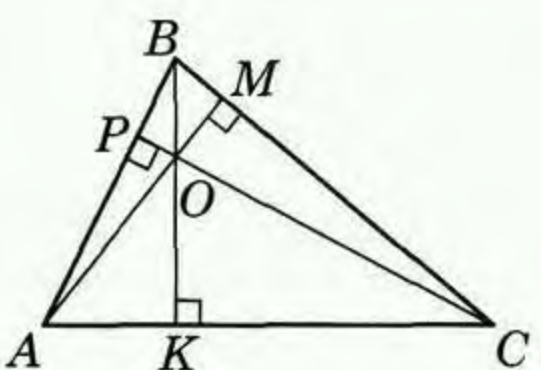
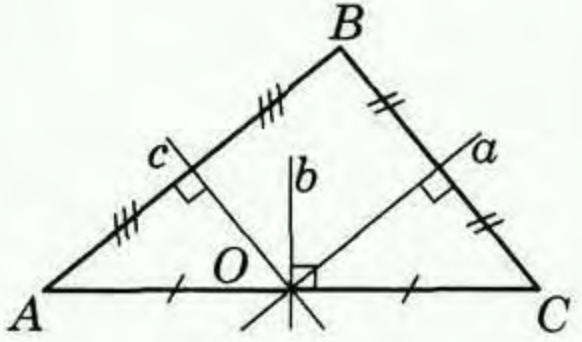
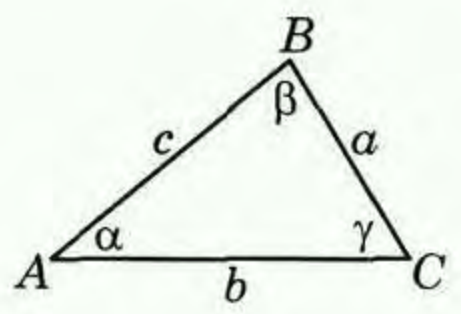
Фигуры	Описание
$\bullet A$	Точка A
	Прямая a
	$A \in a, B \in a, C \in a, M \notin a, AB + BC = AC$ (точка B лежит между точками A и C прямой a)
	Луч OA
	Отрезок AB
	$AB = CM$ (отрезки AB и CM одинаковой длины, при наложении их концы совпадают)
	$a \cap b = O$ (прямые a и b пересекаются в точке O)
	Угол AOB или угол O или угол (ab) . O — вершина угла, OA и OB — его стороны

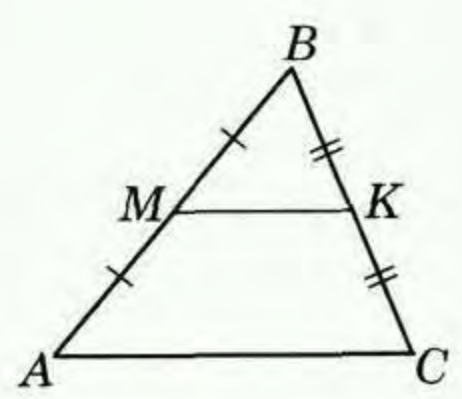
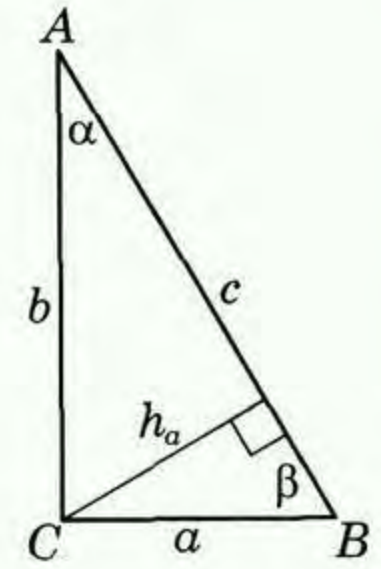
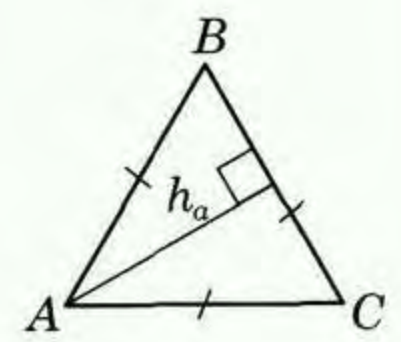
Фигуры	Описание
	Виды углов: угол AOB — развернутый; угол MKP — тупой;
	угол EFD — прямой; угол XYR — острый;
	угол AOC и угол AOB — смежные; угол $AOC +$ угол $AOB = 180^\circ$;
	углы AOC и EOB , углы AOE и COB — пары вертикальных углов; $\angle AOC = \angle EOB, \angle AOE = \angle COB$.
	$a \perp b$ (перпендикулярные прямые)
	$a \parallel b$ (параллельные прямые)
	$a \parallel b, c$ — секущая. Свойства параллельных прямых: 1. $\angle 3 = \angle 5, \angle 4 = \angle 6$ (накрест лежащие углы равны); 2. $\angle 4 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$ (сумма односторонних углов равна 180°); 3. $\angle 1 = \angle 5, \angle 4 = \angle 8, \angle 2 = \angle 6, \angle 3 = \angle 7$ (соответственные углы равны).

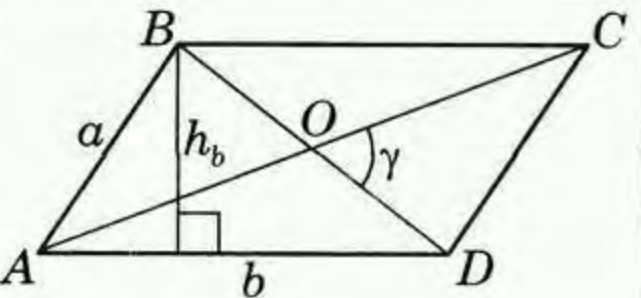
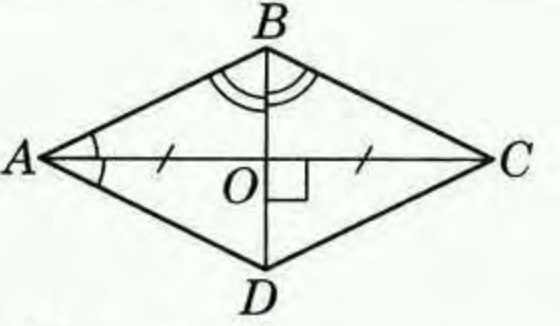
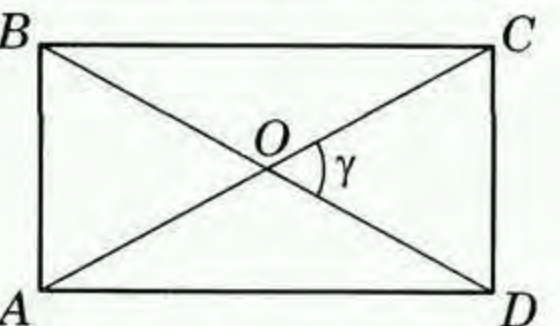
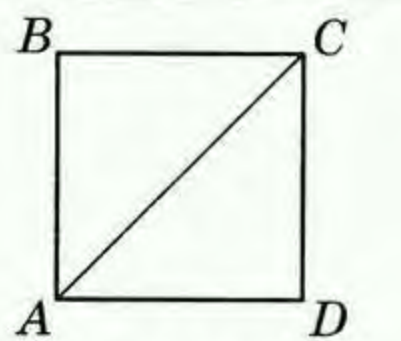
2. Треугольник

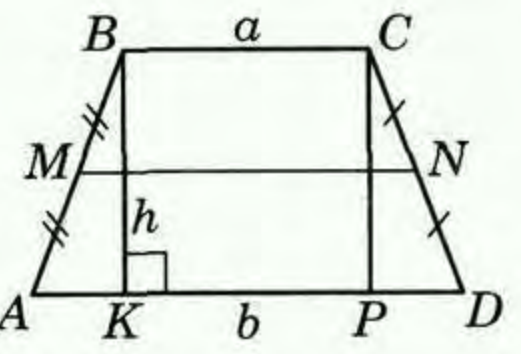
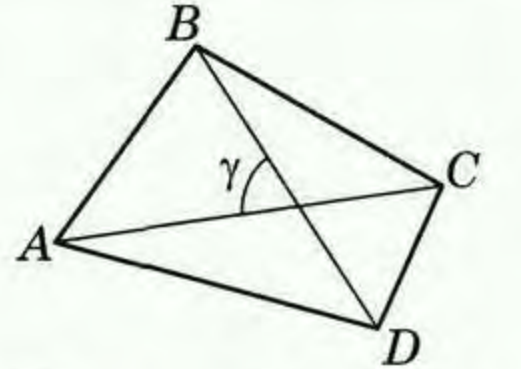
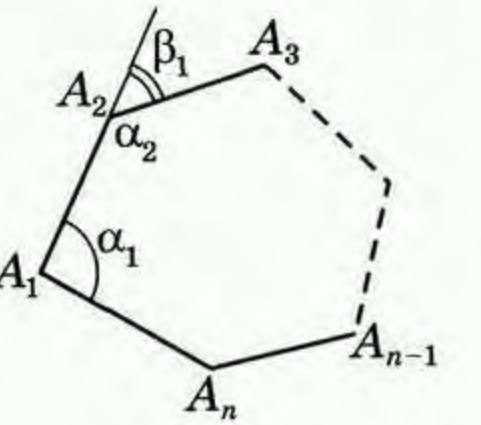
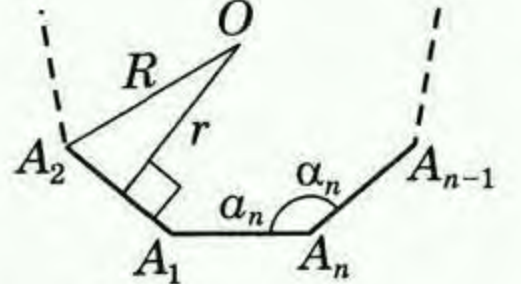
Фигуры	Описание
	$\triangle ABC$ — треугольник ABC ; $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$ — стороны треугольника; $\angle A = \alpha$; $\angle B = \beta$; $\angle C = \gamma$ — углы треугольника; $P = a + b + c$ — периметр треугольника; $p = \frac{a + b + c}{2}$ — полупериметр треугольника.
	Виды треугольников: 1) Треугольник ABC — остроугольный; треугольник KMP — прямоугольный; треугольник EOT — тупоугольный. 2) Треугольник ABC — разносторонний; треугольник DFR — равнобедренный с основанием DR ($DF = FR$); треугольник XYQ — равносторонний ($XY = YQ = XQ$).
	Свойства углов треугольника: 1) $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$; 2) $\varphi = \alpha + \beta$. Свойства сторон треугольника (неравенство треугольника): $a + b > c$; $b - a < c$.
	$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ Определение: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Признаки равенства треугольников: 1) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$; 2) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$; 3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

Фигуры	Описание
	$ABC \sim A_1B_1C_1$ Определение: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k (k > 0)$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Признаки: 1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$; 2) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; $\angle A = \angle A_1$; 3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.
	BH — высота треугольника ABC , $BH \perp AC$; AM — медиана треугольника ABC , $BM = MC$; CE — биссектриса треугольника ABC ; $\angle BCE = \angle ECA$.
	В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высота BH является медианой и биссектрисой.
	Свойство медиан треугольника ABC : 1) $\frac{AO}{OM} = \frac{BO}{OK} = \frac{CO}{OP} = \frac{2}{1}$; 2) O — центр тяжести треугольника ABC .
	Свойства биссектрис треугольника ABC : 1) $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CB}$; $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$; $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC}$; 2) O — центр окружности, вписанной в треугольнике ABC , радиус которой $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a + b + c}$.

Фигуры	Описание
 	Свойство высот треугольника ABC: прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром треугольника ABC. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника: прямые, содержащие серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около этого треугольника. Радиус этой окружности $R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}.$
	Теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$ где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Теорема косинусов: $\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$
Формулы площади треугольника	$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$ $S = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2};$ $S = \frac{abc}{4R};$ $S = p \cdot r;$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона.

Фигуры	Описание
	MK — средняя линия треугольника ABC ($AM = MB$, $BK = KC$). Свойства средней линии: $MK \parallel AC;$ $MK = \frac{1}{2} AC.$
	Треугольник ABC — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$). $\alpha + \beta = 90^\circ;$ $c^2 = a^2 + b^2$ — теорема Пифагора; $\frac{1}{2} AB = R;$ $h_c = \sqrt{AM \cdot MB}; b^2 = AM \cdot AB; a^2 = BM \cdot AB;$ $S = \frac{ab}{2};$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b};$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$
	Треугольник ABC — равносторонний. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ;$ $h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2};$ $r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$ $R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Фигуры	Описание
 $ABCD$ — параллелограмм ($AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$)	Свойство сторон: $AB = CD$, $BC = AD$. Свойство углов: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Свойства диагоналей: $AC \cap BD = O$, $AO = OC$, $BO = OD$. $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$. $S_{ABCD} = bh_b$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \gamma$, $S_{ABCD} = ab \sin A$.
 $ABCD$ — ромб ($ABCD$ — параллелограмм и $AB = BC = CD = DA$)	Свойство диагоналей: диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов. $S_{ABCD} = AB^2 \sin \angle A$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.
 $ABCD$ — прямоугольник ($ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$)	Свойство диагоналей: $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. $S_{ABCD} = ab$, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC^2 \sin \gamma$.
 $ABCD$ — квадрат ($ABCD$ — прямоугольник и $AB = BC = CD = DA$; $ABCD$ — ромб и $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$)	Свойство диагонали: $AC^2 = 2AB^2$. $S_{ABCD} = AB^2$ и $S_{ABCD} = \frac{AC^2}{2}$.

Фигуры	Описание
 $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$)	$AM = MB$, $CN = ND$, тогда MN — средняя линия трапеции и $MN \parallel AD$, $MN = \frac{1}{2} (a + b)$. $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} h = MN \cdot h$. Если $AB = CD$, то трапеция равнобедренная и $\angle A = \angle D$, $AK = PD$.
 $ABCD$ — четырехугольник	$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \gamma$
	$A_1A_2...A_n$ — n-угольник; α_n — внутренний угол, β_n — внешний угол; $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \pi(n - 2)$; $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 2\pi$.
 $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник ($A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$, $\angle A_1 = \angle A_2 = \dots = \angle A_n$)	R — радиус окружности, описанной около многоугольника, r — радиус окружности, вписанной в многоугольник, a_n — сторона многоугольника; $a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}$; $a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$. Стороны некоторых правильных многоугольников: $a_3 = R \sqrt{3}$; $a_4 = R \sqrt{2}$; $a_6 = R$.

Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв	Печатные буквы	Рукописные буквы	Названия букв
Aa	Aa	А	Nn	Nn	Эн
Bb	Bb	Бэ	Oo	Oo	О
Cc	Cc	Цэ	Pp	Pp	Пэ
Dd	Dd	Дэ	Qq	Qq	Ку
Ee	Ee	Е	Rr	Rr	Эр
Ff	Ff	Эф	Ss	Ss	Эс
Gg	Gg	Гэ	Tt	Tt	Тэ
Hh	Hh	Аш	Uu	Uu	У
Ii	Ii	И	Vv	Vv	Вэ
Jj	Jj	Жи	Ww	Ww	Дубль-вэ
Kk	Kk	Ка	Xx	Xx	Икс
Ll	Ll	Эль	Yy	Yy	Игрек
Mm	Mm	Эм	Zz	Zz	Зет

Некоторые буквы греческого алфавита

Буквы	α	β	γ	δ	λ
Названия	альфа	бета	гамма	дельта	ламбда
Буквы	μ	π	ρ	ϕ	$\Omega \omega$
Названия	мю	пи	ро	фи	омега (большая и малая)

Таблица значений тригонометрических функций

Угол в градусах	sin	cos	tg	ctg	
0	0,00	1,00	0,00		90
1	0,02	1,00	0,02	57,3	89
2	0,03	1,00	0,03	28,6	88
3	0,05	1,00	0,05	19,1	87
4	0,07	1,00	0,07	14,3	86
5	0,09	0,10	0,09	11,4	85
6	0,10	0,99	0,11	9,51	84
7	0,12	0,99	0,12	8,14	83
8	0,14	0,99	0,14	7,12	82
9	0,16	0,99	0,16	6,31	81
10	0,17	0,98	0,18	5,67	80
11	0,19	0,98	0,19	5,15	79
12	0,21	0,98	0,21	4,71	78
13	0,23	0,97	0,23	4,33	77
14	0,24	0,97	0,25	4,01	76
15	0,26	0,97	0,27	3,73	75
16	0,28	0,96	0,29	3,49	74
17	0,29	0,96	0,31	3,27	73
	cos	sin	ctg	tg	Угол в градусах

Угол в градусах	sin	cos	tg	ctg	
18	0,31	0,95	0,32	3,08	72
19	0,33	0,95	0,34	2,90	71
20	0,34	0,94	0,36	2,75	70
21	0,36	0,93	0,38	2,60	69
22	0,37	0,93	0,40	2,48	68
23	0,39	0,92	0,42	2,36	67
24	0,41	0,91	0,45	2,25	66
25	0,42	0,91	0,47	2,15	65
26	0,44	0,90	0,49	2,05	64
27	0,45	0,89	0,51	1,96	63
28	0,47	0,88	0,53	1,88	62
29	0,48	0,87	0,55	1,80	61
30	0,50	0,87	0,58	1,73	60
31	0,52	0,86	0,60	1,66	59
32	0,53	0,85	0,62	1,60	58
33	0,54	0,84	0,65	1,55	57
34	0,56	0,83	0,67	1,48	56
35	0,57	0,82	0,70	1,43	55
	cos	sin	ctg	tg	Угол в градусах

Угол в градусах	sin	cos	tg	ctg	
36	0,59	0,81	0,73	1,38	54
37	0,60	0,80	0,75	1,33	53
38	0,62	0,79	0,78	1,28	52
39	0,63	0,78	0,81	1,23	51
40	0,64	0,77	0,84	1,19	50
41	0,66	0,75	0,87	1,15	49
42	0,67	0,74	0,90	1,11	48
43	0,68	0,73	0,93	1,07	47
44	0,69	0,72	0,97	1,04	46
45	0,71	0,71	1,00	1,00	45
	cos	sin	ctg	tg	Угол в градусах

Значения тангенсов (котангенсов) углов, близких к 90° (0°)

Углы	tg	
88°00'	28,64	2°00'
88°10'	31,24	1°50'
88°20'	34,37	1°40'
88°30'	38,19	1°30'
88°40'	42,96	1°20'
88°50'	49,10	1°10'
89°00'	57,27	0°50'
89°10'	68,75	0°40'
89°20'	85,94	0°30'
89°30'	114,6	0°20'
89°40'	171,9	0°10'
89°50'	343,8	0°09'
89°51'	382,0	0°08'
89°52'	429,7	0°07'
89°53'	491,1	0°06'
	ctg	Углы

Продолжение

Углы	tg	
89°54'	573,0	0°05'
89°55'	687,5	0°04'
89°56'	859,4	0°03'
89°57'	1146	0°02'
89°58'	1719	0°01'
89°59'	3438	2°00'
	ctg	Углы

Предметный указатель

В

Вписанный угол 25

Г

Геометрическое место точек 27

Градусная величина дуги 25

Д

Диаметр окружности 33

Длина дуги окружности 88

Длина окружности 86

Дуга окружности 25

Е

Единичная полуокружность 55

К

Касательная 15

Координаты произвольной точки плоскости 56

Косинус угла 55

Котангенс угла 56

Круг 91

Л

Лемма 4

Линия центров 20

О

Окружность, вписанная в треугольник 18

Окружность, описанная около треугольника 4

Ортоцентр 9

П

Площадь круга 92

— кругового сегмента 93

— кругового сектора 93

Правильные многоугольники 78

С

Сегмент 93

Сектор 92

Синус угла 55

Т

Тангенс угла 56

Теорема косинусов 66

— о величине вписанного угла 26

— о пересекающихся хордах 38

— о свойстве медиан треугольника 11

— о секущих к окружности, проведенных из одной точки 39

— о центре вписанной окружности 18

— о центре описанной окружности 5

— о четырехугольнике, вписанном в окружность 43

— о четырехугольнике, описанном около окружности 43

— об окружности, вписанной в правильный многоугольник 79

— об окружности, описанной около правильного многоугольника 79

— об отношении длины окружности к ее диаметру 87

— о свойстве высот треугольника 9

— признак касательной 15

— синусов 62

Ф

Формула Герона 69

Х

Хорда 33

Ц

Центр тяжести треугольника 12

Центральный угол 25

ОТВЕТЫ

Глава I

2. 5 см. 3. $16\sqrt{3}$ см². 4. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ см. 5. $16\sqrt{3}$ см. 6. $12\sqrt{2}$ см. 7. $4\sqrt{13}$ см.
 8. 4 см. 9. $4\sqrt{3}$ см. 10. $4\sqrt{3}$ см. 11. 6,25 см. 12. $84\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. 13. Нет.
 14. Нет. 15. 45 см. 17. 50°, 130°. 18. а) 14,5 см, 29 см; б) 25 см, 50 см.
 20. $r > R$. 22. $\frac{c^2}{\sqrt{4c^2 - a^2}}$. 29. 30°. 31. $2\sqrt{3}$ см. 33. а) 96 см²; б) 10 см,
 $2\sqrt{13}$ см, $4\sqrt{13}$ см. 35. 26 см. 36. а) 6 см; б) 15 см; в) 3с. 41. $8\sqrt{3}$ см.
 42. $5\sqrt{2}$ см. 43. $24\sqrt{3}$ см. 44. $12 + 6\sqrt{3}$ см. 45. 120°. 51. $2\sqrt{3}$ см.
 52. $24\sqrt{3}$ см. 53. 5 см. 54. $2r$, $2\sqrt{3}r$. 55. 6:5. 56. 4 см. 57. 60 см.
 58. $a - c$. 59. $4 + 4\sqrt{3}$ см. 60. $10 + 10\sqrt{3}$ см. 61. 108 см². 62. $\frac{1}{2}(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})$. 63. $(\sqrt{2} - 1)$ см. 65. 70 см или 10 см. 66. Нет. 69. 30 см².
 70. $2r^2(2\sqrt{3} + 3)$. 71. $2R$. 73. $\frac{1}{2}\sqrt{65}$ см. 74. а) 1,5 см; б) $6,75\sqrt{3}$ см².
 75. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. 76. 7 см, 24 см. 83. $\frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}}$. 84. 40 см.

Глава II

85. 60°. 86. 60°. 87. 60°, 300°. 88. а) 140°, 100°, 120°; б) 70°, 50°, 60°. 89. а) 50°; б) 70°; в) 100°; г) 150°; д) 450°. 90. 40°, 80°. 91. 15°, 45°. 92. 84°, 60°, 36°. 93. 36°, 54°, 90°. 94. Нет. 95. Равны. 96. а) 40°, 180°, 140°; б) 20°, 90°, 70°. 97. 100°, 160°, 100°. 98. 98° или 38°. 99. 40°, 60°. 100. 20°. 101. Полуразность двух углов. 102. Разность двух углов. 103. 40°, 40°, 100°. 105. 40°. 106. 30°. 112. 4 см. 113. 12 см. 114. 120°, 30°. 118. 1 дм. 119. 12 см, 20 см. 120. 1 см. 121. $\frac{1}{2}\sqrt{4m^2 - n^2}$. 122. R , $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. 124. 60°. 132. а) 38 см; б) 5 см. 133. 10 см. 134. $8\sqrt{2}$ см. 137. 17 см. 138. 2:3. 139. Увеличится в 3 раза. 140. а) 4 см; б) 20 см; в) 35 см, 15 см. 141. а) $3\sqrt{5}$ см; б) $\sqrt{3}$ см. 142. 8 см. 143. $4\sqrt{2}$ см. 144. 4 см. 145. а) 6; б) 3; в) $\sqrt{3}$. 146. 21 см. 147. В 1,5 раза. 148. 10 см. 149. 18 см. 150. $\frac{(bn - am)n}{m^2 - n^2}$;

$$\frac{(bn - am)m}{m^2 - n^2}. 151. 13 \text{ см. } 152. 30 \text{ см, } 33 \text{ см. } 153. 66 \text{ см, } 42 \text{ см. } 154. 8 \text{ см.}$$

155. 15 см. 156. 8 см. 157. 1:4. 158. 5:2. 159. а) 45°, 90°, 135°, 90°; б) 90°, 60°, 90°, 120°. 162. 51°, 59°, 39°. 163. 114°, 53°, 66°. 164. 66°, 114°. 165. 100 см. 166. 3 см, 6 см, 9 см, 6 см. 167. 0,25 см. 168. $r(a + c)$. 171. Равными. 175. 5 см. 177. $\sqrt{ab}$. 178. а) 12°; б) 8°; в) 4°. 179. 47°. 180. а) 40°, 100°, 220°; б) 110°, 20°, 50°. 181. 20°, 60°, 80°, 80°. 182. 20°, 40°. 183. 50° или 130°. 184. 135°. 185. 57°. 187. 2 части по 25°10', 2 части по 154°50'; 24°70'; 77°25'. 188. а) 60°; б) 30°. 189. 10 см. 190. $\sqrt{3}$ см. 192. 90°. 193. 9 дм. 194. 30 см. 195. $5\sqrt{6}$ см. 197. а) 7 см; б) $r(\sqrt{5} - 1)$. 198. 12 см. 199. 24 см. 200. 24 см. 201. 33 см. 202. а) 14,5 см; б) 65 см; в) $\frac{1}{5}r$; г) 5 см или 45 см. 203. 21 дм, 29 дм. 205. а) 8 см; б) 18 см; в) $12\sqrt{2}$ см. 206. а) 3 см; б) 4 см; в) $\frac{a + a\sqrt{5}}{2}$. 207. а) 160 км; б) 189 км. 208. 17 см. 209. 13 см. 210. 14 см, 40 см. 211. 12 см, 18 см. 214. 0,4r. 215. а) 10 см; б) 8 см; в) 9,375 см. 216. 20,8 см, 31,2 см. 217. 11,2 см, 16,8 см, $10\frac{10}{13}$ см, $17\frac{3}{13}$ см. 218. 16 см, 10 см. 220. 7 см, 21 см. 221. 25 см, 15 см. 222. 162 см². 223. 3,5 дм. 224. 15 см, 20 см. 225. 26 см. 226. 15 см, 13 см, 14 см. 227. 14 дм, 15 дм. 228. 32 см, 24 см. 229. 28,8 см. 230. 15 см, $6\sqrt{3}$ см. 232. 10 дм, 8 дм. 236. 70°, 70°, 40°. 237. $\frac{3}{\text{tg } 12^\circ + \text{tg } 18^\circ}$. 238. 80°. 239. 71°, 62°, 47°. 240. $\sqrt{ab}$. 242. 144°.

Глава III

244. $4\sqrt{58}$ см; 40 см². 245. а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 = 2$; в) $x^2 + y^2 = 6,25$. 246. а) $3x + 4y + 1 = 0$; б) $x + y - 7 = 0$; в) $3x - 2y + 2 = 0$. 256. а) $12\sqrt{2}$ см²; б) $12\sqrt{2}$ см². 257. 102 см². 258. 25 см². 261. $\frac{ab \sin \gamma}{(a + b) \sin \frac{\gamma}{2}}$. 262. 0,5ab. 263. 6. 266. 2,5 см. 267. 0,12, 0,84. 268. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 269. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 270. $r\sqrt{3}$. 271. $r\sqrt{2}$. 272. 75°; $\approx 3,6$ см; 2,9 см. 273. 6,42 ч. 274. а) 17,9, 15,38, 45°; б) 65,8, 88,6, 20°. 275. 8,69 см, 21°, 39°. 276. 17,7 см, 14,6 см. 278. а) 1,7; б) 0,6. 279. Через B. 280. Нет. 281. $\frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. 282. $\frac{\sqrt{3}}{2(\sin(120^\circ - \varphi) + \sin \varphi)}$. 283. $\frac{2(\sin \varphi + \sin(120^\circ - \varphi))}{\sqrt{3}}$.

284. $0,35d^2$. 285. $AB \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$; $BC + AB \frac{\sin(\beta + \gamma - 180^\circ)}{\sin \gamma}$. 286. Нет. 287. а) $28,6^\circ$, 11° , 39° ; б) $19,9$, 27° , 58° ; в) $3,3$, 24° , 11° ; г) $53,4$, 16° , 12° ; д) $8,09$, 130° , 35° . 288. а) 54° , 13° , 113° ; б) 34° , 44° , 102° ; в) 39° , 93° , 48° ; г) 15° , 11° , 154° ; д) 136° , 15° , 29° . 291. $\frac{5}{7}$; $\frac{19}{35}$; $\frac{1}{5}$. 295. $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 \pm 2ac \cos \alpha}$. 296. $\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab \cos \alpha}$. 297. $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{18,25}$ см. 298. $12,5$ см, 44° , 76° . 300. $\sqrt{109}$ см. 302. $2,4\sqrt{6}$ см, $2\sqrt{6}$ см, $1\frac{5}{7}\sqrt{6}$ см. 304. $8\sqrt{3}$ см². 306. 135 см². 307. $\frac{1}{2}\sqrt{106}$ см, $3\frac{1}{3}$ см. 308. $S = \frac{1}{4}a\sqrt{P(P-2a)}$. 309. Да. 312. $R = \frac{abc}{\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}}$. 313. $3\sqrt{15}$ см². 314. $\sqrt{a^2 + b^2 \pm ab}$. 317. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. 318. $\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$. 319. $6(1 + \sqrt{6})$. 320. а) $\frac{ab}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. 321. а) $\frac{fg}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{fg\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{fg}{4}$; г) $\frac{fg}{4}$; д) $\frac{fg}{4}$. 322. а) 60° ; б) 30° ; в) 45° . 323. а) 120° ; б) 120° . 324. $48^\circ 11'$, $73^\circ 24'$, $58^\circ 25'$. 325. 8 см, 15 см. 326. 14 дм, 16 дм. 327. а) 3 см, 8 см; б) 5 см, 21 см; в) 7 см, 8 см; г) 20 см, 32 см. 328. 28° , 32° . 329. $22,5$ см. 330. 7 дм. 331. 7 см, 8 см. 332. 60° . 333. 39 дм, 56 дм. 334. 72 см. 335. 13 см. 336. 10 см. 337. 16 см. 338. 15 см, $33,6$ см. 339. 13 см, 15 см. 340. 39 см. 342. $-\frac{13}{62}$; $\frac{59}{62}$. 343. 15 см, 8 см. 345. 14 см. 346. 13 см. 347. 35 см. 348. 42 см, 49 см. 349. 105° . 350. $4\sqrt{3}$ см. 351. $\sqrt{a^2 + b^2 \pm \sqrt{3}ab}$. 355. $\frac{12\sqrt{42}}{13}$ см, $\frac{\sqrt{105}}{2}$ см, $\frac{12\sqrt{15}}{11}$ см. 356. 24 см, 40 см, 15 см. 357. 35 см, 56 см. 358. 20 см. 359. 4 дм, 8 дм, $4\sqrt{3}$ дм. 360. 15 дм, 24 дм. 361. $5\sqrt{2}$ см. 364. 39 см, 25 см, 56 см, 420 см². 365. 14 см, 15 см. 366. 630 см². 367. 20 см. 368. 1008 см². 369. 44 см.

Глава IV

370. а) 60° ; б) 108° ; в) 120° ; г) 144° ; д) 160° . 371. а) 6 ; б) 12 ; в) 4 ; г) 10 ; д) 20 ; е) 5 . 372. 4 . 373. $1:2$ и $1:4$. 374. $150\sqrt{3}$ см². 375. $108\sqrt{3}$ дм². 376. 40 см. 378. 6 см. 379. $32\sqrt{3}$ см. 380. а) 36 см²; б) $432\sqrt{3}$ см²; в) $162\sqrt{3}$ см²; г) $248,52$ см². 381. $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$. 382. $3:4$.

383. $R^2\sqrt{2}$. 385. $10\sqrt{2}$ см. 386. 6 см. 388. Из восьмиугольников. 392. а) $\frac{1}{4}R^2(2 - \sqrt{3})$; б) $\frac{1}{4}R^2$; в) $\frac{1}{4}R^2(4 - \sqrt{3})$. 393. 1 см. 395. 10π см. 396. 50π . 397. $0,5$ дм. 398. 10 м. 399. На 2π см. 400. $1:\pi$. 401. На $17,2$ см. 402. 1 м. 403. На $\frac{2}{\pi}$ м. 404. а) Увеличится в 3 раза; б) уменьшится в 2 раза; в) увеличится в k раз; г) уменьшится в k раз. 405. а) Увеличится в k раз; б) уменьшится в k раз. 406. а) $\frac{2\sqrt{3}\pi m}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2 + b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$; г) $\frac{2\pi p}{\sqrt{2 - 2\cos p}}$; д) 16π . 407. а) πa ; б) $\pi c(\sqrt{2} - 1)$; в) $\pi c(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$; г) $\frac{\pi h \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$. 408. $1,5$ м. 409. $12\,739$ км. 410. $41\,888$ км. 411. а) 2π см; б) 3π см; в) 4π см; г) 6π см. 412. 30 . 413. $125,6$ см. 414. $38,2$ см. 415. 6° . 416. $0,5$ дм. 417. π см. 418. а) На 2π см; б) на 2π см. 419. 5 см. 420. а) По дуге; б) по радиусам. 421. 90° . 423. $\frac{3,14}{\pi}$ дм². 424. 200π см². 425. 8 дм². 426. $2\sqrt{\pi}$. 427. 2π . 428. $0,25\pi a^2$. 429. 900π см². 430. На $\pi(2R + 1)$. 431. Площадь одного равна сумме площадей двух других. 432. В m^2 раз. 433. В $6,25$ раза. 434. а) В $2,25$; б) в 4 ; в) в 9 ; г) в 16 раз. 435. а) Увеличили в k^2 раз; б) уменьшили в k^2 раз. 436. а) $\frac{1}{4}\pi(a^2 + b^2)$; б) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2 \alpha}$; в) $\pi\left(\frac{4h^2 + a^2}{8h}\right)^2$. 438. $34,2$ м². 439. 10 м, $78,5$ м². 440. 400π см². 441. $1,2$ мм. 442. $7,2\pi$ дм³. 443. $r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. 444. π , 3π , 5π , 7π . 446. 30π см². 447. $\sqrt{\frac{5S}{2\pi}}$. 448. $a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. 449. 125 м². 450. 5 см. 451. 3 см². 452. $\frac{\pi}{2} - 1$. 457. $9\sqrt{6}$ см. 458. 4 см. 460. $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ см². 461. а) $2\sqrt{3}r$; $6\sqrt{3}r$; $3\sqrt{3}r^2$; б) $R\sqrt{3}$; $3R\sqrt{3}$; $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. 462. а) 20 ; б) 9 ; в) 5 ; г) 6 . 463. $1,5\sqrt{6}$ дм. 464. $6,72$ см. 465. а) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 467. 9 см, $\frac{81\sqrt{3}}{2}$ см². 468. $4R^2(\sqrt{2} - 1)$. 469. 330 км. 470. а) $9,6\pi$ см; б) $\pi a \sin \alpha$. 471. $2,8$ км. 477. а) Да; б) нет. 478. $a\sqrt{2}$. 479. У квадрата. 481. $3R(2 - \sqrt{3})$. 483. 1) 10π см; 2) 20π см. 484. $\frac{1}{\pi}$ см. 485. 7 см.

481. $3R(2 - \sqrt{3})$. 483. 1) 10π см; 2) 20π см. 484. $\frac{1}{\pi}$ см. 485. 7 см.
 486. На 4π дм. 488. а) 1080° ; б) 2340° ; в) 3240° . 489. а) 1440° ; б) 6120° ;
 в) 3960° . 490. а) $12\sqrt{3}$ см; б) 15 см; в) $24\sqrt{2}$ см. 491. $r, r, r\sqrt{3}, r\sqrt{3}$.
 492. 8 см, 4 см. 493. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $2R^2$; 3) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$. 494. $3r^2\sqrt{3}, 4r^2, 2r^2\sqrt{3}$.
 496. $72\sqrt{3}$ см². 497. $162r^2\sqrt{3}$ см². 498. 4 см. 500. $24\sqrt{2}$ см.
 501. $35\sqrt{3}$ см. 502. 10 см, 24 см. 503. 30 см, 48 см. 504. $R\sqrt{2}, 1,5R^2$.
 505. а) $2R(1 + 2\sqrt{3})$; б) $2R(2 + \sqrt{3})$. 506. $0,5R(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.
 507. $\pi(2 + \sqrt{3})$. 510. 6 см, 18 см. 511. $11\sqrt{3}$ см, $2\sqrt{3}$ см. 512. $5\sqrt{3}$ дм,
 7 дм. 513. 4 см. 514. $64\sqrt{3}$ см². 515. $54\sqrt{3}$ см².

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	3
----------------------	---

Глава I Замечательные точки треугольника

§ 1. Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника	4
§ 2. Свойство высот треугольника	9
§ 3. Свойство медиан треугольника	11
§ 4. Взаимное расположение прямой и окружности	14
§ 5. Свойство биссектрис треугольника	18

Глава II Окружность

§ 6. Углы, вписанные в окружность	25
§ 7. Хорды и их свойства	33
§ 8. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности	38
§ 9. Четырехугольник, вписанный в окружность и описанный около нее	43

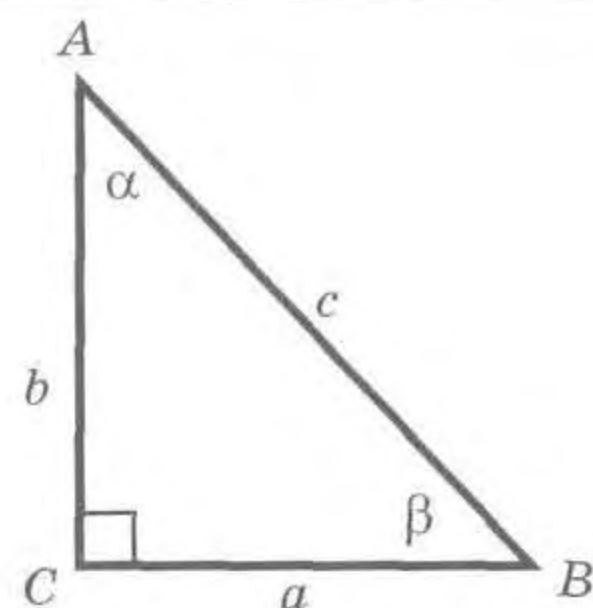
Глава III Соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника

§ 10. Метод координат	53
§ 11. Теорема синусов	62
§ 12. Теорема косинусов	66

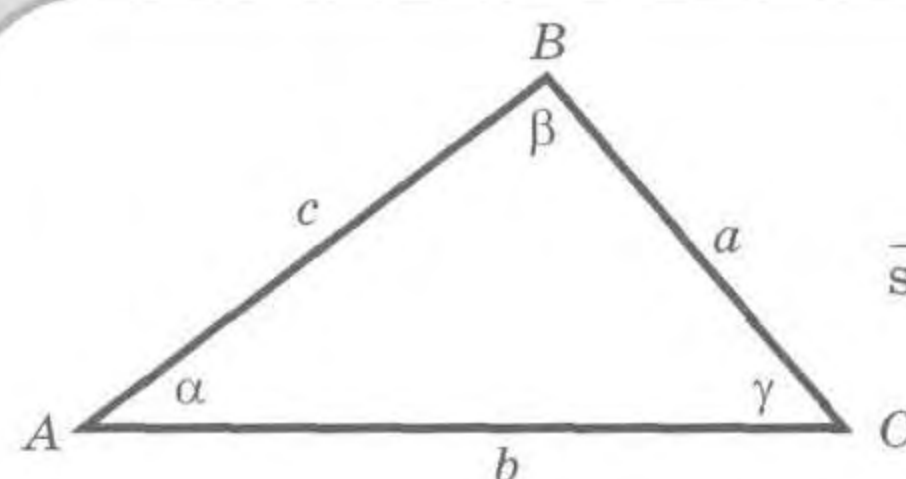
Глава IV Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга

§ 13. Правильные многоугольники	78
§ 14. Длина окружности	86
§ 15. Площадь круга	91
Приложение	104
Предметный указатель	118
Ответы	120

Соотношения между сторонами и углами треугольника



$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{b}{a} \\ c^2 &= a^2 + b^2\end{aligned}$$



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Теорема косинусов

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma\end{aligned}$$

Тригонометрические тождества

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 & \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} & \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}\end{aligned}$$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \varphi$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$	—

Правильные многоугольники

n — количество сторон;
 r — радиус окружности, вписанной в правильный n -угольник;
 R — радиус окружности, описанной около него.

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$a_3 = R\sqrt{3}$$

$$a_4 = R\sqrt{2}$$

$$a_6 = R$$

$$a_3 = 2r\sqrt{3}$$

$$a_4 = 2r$$

$$a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

